

## 数学(二)试题

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,把答案填在题中横线上)

(1) 设曲线  $y = f(x)$  由  $x = \int_1^t \frac{\cos u}{u} du$  及  $y = \int_1^t \frac{\sin u}{u} du$  确定. 则该曲线当  $t = \frac{\pi}{4}$  时的切线斜率等于 1, 此曲线介于  $t=1$  与  $t = \frac{e}{2}$  之间的弧长为                    。

(2) 曲线  $y = \frac{(2+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$  的斜渐近线方程为                    。

(3) 设符号函数  $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = e^{2-x} - 1$ ,

则  $f(g(x)) =$                      。

(4) 若  $f(x) = 2nx(1-x)^n$ , 记  $M_n = \max_{x \in [0,1]} \{f(x)\}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n =$                      。

(5) 设  $y = y(x)$  在任意点  $x \in (0, +\infty)$  满足

$$\Delta y = \left(\frac{y}{x} + x \sin x\right) \Delta x + o(\Delta x), \text{ 若 } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \text{ 则 } y(x) = \text{                    }.$$

(6) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是3维列向量, 记矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $B = (\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$ ,  $C = 2A - B$ ,

已知  $|A| = 1$ , 则  $|C| =$                      。

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分,在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内。)

(7) 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \sqrt{\cos 2x}}{\sqrt{1+x^k} - 1} = a \neq 0$ , 则 (     )

(A)  $k = 2, a = -2$ 。                      (B)  $k = -2, a = -2$ 。

(C)  $k = 2, a = 2$ 。                      (D)  $k = -2, a = 2$ 。

(8) 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上有三阶连续导数, 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'''(x) = 0$ , 则 (     )

(A)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$ 。      (B)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) \neq 0$ 。

(C)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \neq 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$ 。      (D)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \neq 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) \neq 0$ 。

(9) 函数  $f(x, y) = e^{x^2-y}(5-2x+y)$  在全平面上 ( )

- (A) 有最大值无最小值。 (B) 有最小值无最大值。  
 (C) 既有最小值, 也有最大值。 (D) 即无最小值, 也无最大值。

(10) 设  $f(x)$  在  $x=0$  某邻域内有二阶连续导数, 且  $f'(0) = 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf''(x)}{1 - \cos x} = 1, \text{ 则 ( )}$$

- (A)  $f''(0) \neq 0$ , 但  $(0, f(0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点。  
 (B)  $f''(0) = 0$  且  $f(0)$  是  $f(x)$  的极小值。  
 (C)  $f''(0) = 0$ , 且  $(0, f(0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点。  
 (D)  $f''(0) \neq 0$  且  $f(0)$  是  $f(x)$  的极小值。

(11) 设  $A$  是一个装满水的半球形水池, 半径为  $R$ , 若用水泵将  $A$  中的水全部泵出, 则克服重力所作的功为 ( )

- (A)  $\frac{1}{2}\pi R^4$ 。 (B)  $\frac{1}{3}\pi R^4$ 。 (C)  $\frac{1}{4}\pi R^4$ 。 (D)  $\frac{1}{8}\pi R^4$ 。

(12) 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}, & x \neq 0, \text{ 且 } x \neq 1 \\ 0, & x = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$ , 则 ( )

- (A)  $x=0, x=1$  都是  $f(x)$  的可去间断点。  
 (B)  $x=0$  是  $f(x)$  的无穷间断点;  $x=1$  是  $f(x)$  的第一类间断点, 但不为可去间断点。  
 (C)  $x=0$  是  $f(x)$  的无穷间断点;  $x=1$  是  $f(x)$  的可去间断点。  
 (D)  $x=0, x=1$  均为  $f(x)$  的第一类间断点。

(13) 设  $\lambda_1, \lambda_2$  是 3 阶矩阵  $A$  的两个不同的特征值,  $\alpha_1, \alpha_2$  是  $A$  的属于  $\lambda_1$  的线性无关的特征向量,  $\alpha_3$  是  $A$  的属于  $\lambda_2$  的特征向量, 则  $\alpha_1 + A\alpha_3, A(\alpha_2 - \alpha_3), A\alpha_1 + \alpha_3$  线性相关的充分必要条件是 ( )

- (A)  $\lambda_1 = 0$  或  $\lambda_1\lambda_2 = 1$  (B)  $\lambda_2 = 0$  或  $\lambda_1\lambda_2 = 1$   
 (C)  $\lambda_1 \neq 0$  且  $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$  (D)  $\lambda_2 \neq 0$  且  $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$

(14) 对 3 阶矩阵  $A$  的伴随矩阵  $A^*$  先交换第 1 行和第 3 行, 然后将第 2 列的  $-2$  倍加到第 3 列, 得到矩阵  $-E$ , 其中  $E$  是 3 阶单位矩阵, 则  $A = ( )$

(A)  $\begin{pmatrix} & 1 & \\ & 1 & -2 \\ 1 & & \end{pmatrix}$  或  $\begin{pmatrix} & & -1 \\ & -1 & 2 \\ -1 & & \end{pmatrix}$  .      (B)  $\begin{pmatrix} & 1 & \\ & 1 & -2 \\ 1 & & \end{pmatrix}$  或  $\begin{pmatrix} & & 1 \\ -2 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$  .

(C)  $\begin{pmatrix} & & -1 \\ & -1 & 2 \\ -1 & & \end{pmatrix}$  或  $\begin{pmatrix} & & -1 \\ 2 & -1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}$  .      (D)  $\begin{pmatrix} & & 1 \\ -2 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$  或  $\begin{pmatrix} & & -1 \\ 2 & -1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}$  .

三、解答题(本题 9 小题, 满分 94 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 11 分) 设  $1 < a_1 < 5$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{a_n(5-a_n)}$ ,  $(n=1, 2, \dots)$ ,

证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在, 并求此极限值。

(16) (本题满分 11 分) 求不定积分  $\int \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}} dx$ 。

(17) (本题满分 11 分)

一个容器的内表面侧面由曲线  $x = \sqrt{2+y^2}$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) 绕  $x$  轴旋转而成, 外表面由曲线  $x = \sqrt{2+y^2}$  在点  $(2, \sqrt{2})$  的切线位于点  $(2, \sqrt{2})$  与  $x$  轴焦点之间的部分绕  $x$  轴旋转而成, 此容器材质的密度为  $\mu$ , 求此容器自身的质量  $M$  及其内表面的面积  $S$ 。

(18) (本题满分 12 分) 求解二阶微分方程的定解问题 
$$\begin{cases} \cos y \frac{d^2 y}{dx^2} + \sin y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{dy}{dx} \\ y(-1) = \frac{\pi}{6}, y'(-1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$
。

(19) (本题满分 12 分) 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ , 记

$$F(x) = \int_0^x x f(t) dt.$$

(1) 求  $F'(x)$ ;

(2) 试证: 在  $(0, 1)$  内至少存在一点, 使  $\int_0^\xi f(x) dx = -\xi f(\xi)$

(3) 试证: 在  $(0, 1)$  内至少存在一点  $x_0$ , 使得  $2f(x_0) + x_0 f'(x_0) = 0$

(20) (本题满分 10 分) 设函数  $f(x)$  有反函数  $g(x)$ , 且

$$f(a) = 3, f'(a) = 1, f''(a) = 2,$$

(1) 求  $g''(3)$  ; (2) 求极限  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x(f(x) - f(a))}{\ln x - \ln a}$ 。

(21)(本题满分9分) 计算  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} |x+y| dx dy$ 。

(22)(本题满分9分) 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$  的秩为 1, 且  $(0,1,-1)^T$  是  $A$  的一个特征向

量, (1) 求参数  $a, b$  ; (2) 求可逆矩阵  $P$  和对角矩阵  $D$ , 使得  $P^{-1}AP = D$ 。

(23) 参数  $a$  取何值时线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + (a+3)x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$$

有无穷多解? 求出通解。