水木艾迪考研辅导教学与命题研究中心
清华大学数学系教授 刘坤林 俞正光 葛余博 谭泽光

数学(三)试题

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 设 $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内可导，当 $x\neq 0$ 时，$f(x)\neq 0$，已知 $f(0)=0$，$f'(0)=2$，则

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{2}f(x)\right)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。$$

(2) 设参数 $t>\frac{1}{16}$，差分方程 $y(k+2)-\frac{1}{2}y(k+1)+ty(k)=0$ 的通解为 $y(k)=a_k$，则当 t 的取值范围是 __________ 时，有 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=0$。

(3) 设函数 $y=x^{\sin x}(x>0)$，则 $dy\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=$____________ 。

(4) 若向量 $\beta=(0,k,k^2)$ 能由向量 $\alpha_1=(1+k,1,1)$，$\alpha_2=(1,k+1,1)$，$\alpha_3=(1,1,1+k)$ 唯一线性表示，则 k 应满足________ .

(5) 两名射手各向自己的靶独立射击，直到有一次命中时该射手才(立即)停止射击. 如两名射手每次命中概率分别为 1/3 和 1/4. 求两射手均停止射击时脱靶（未命中）总数的数学期望=___________.

(6) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1/3 & 若 x\in[0,1]\\ 2/9 & 若 x\in[3,6]\\ 0 & 其它,\end{cases}$$

若使得 $P(X\geq k)=1/3$，则 k 的取值范围是______。

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 设函数 $f(x)$ 连续，在 x_0 可导，且 $f(x_0)=x_0^2$，$f'(x_0)>2x_0$，则存在 $\delta>0$，使得（　　）。

(A) 函数 $f(x)-x^2$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内单调增加。

(B) 函数 $f(x)-x^2$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内单调减少。

(C) 对任意的 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 有 $f(x)>x^2$。

(D) 对任意的 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 有 $f(x)>x^2$。

(8) 设 $0<R<1$，则二重积分 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2}\frac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$ 等于（　　）。

(A) $4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x>0,y>0}}\frac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$。 (B) $2\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x>0}}\frac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$。

(C) $4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x>0,y<0}}\frac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$。 (D) 0.

(9) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}(x-a)^n$ 在点 $x_1=-2$ 条件收敛，则幂级数

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}(x-a)^n$ 在点 $x_2=\frac{1}{2}$ 的收敛情况是（ ）。

(A) 绝对收敛． (B) 条件收敛． (C) 发散． (D) 不能确定．

(10) 已知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{f(x,y)-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}=1$，则（ ）。

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点 (B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点 (D) 无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

(11) 设 $z=h(x,y)$ 由方程 $e^{xyz}=x+y+z$ 确定，则 $h(x,y)$ 在点 $P_0(0,1)$ 的两个偏导数（ ）。

(A) 分别等于0和-1。 (B) 分别等于 -1和0。

(C) 都等于0。 (D) 都等于-1。

. **(12)** 设 3 阶矩阵 A 的行列式 $|A|<0$，A 的伴随矩阵满足 $\begin{pmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}A^*\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & -2\\ & & 1\end{pmatrix}=-E$，

其中 E 是 3 阶单位矩阵，则 $A=$（ ）。

(A) $\begin{pmatrix} & & 1\\ & 1 & -2\\ 1 & & \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} & & 1\\ -2 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}-1 & & \\ 2 & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & 2\\ & & -1\end{pmatrix}$

(13) 设 λ_1,λ_2 是 3 阶矩阵 A 的两个不同的特征值，α_1,α_2 是 A 的属于 λ_1 的线性无关的特征向量，α_3 是 A 的属于 λ_2 的特征向量，则 $\alpha_1+A\alpha_3$，$A(\alpha_2-\alpha_3)$，$A\alpha_1+\alpha_3$ 线性相关的充分必要条件是（ ）。

(A) $\lambda_1 = 0$ 或 $\lambda_1\lambda_2 = 1$。 (B) $\lambda_2 = 0$ 或 $\lambda_1\lambda_2 = 1$。

(C) $\lambda_1 \neq 0$ 且 $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$。 (D) $\lambda_2 \neq 0$ 且 $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$。

(14) 设总体X二阶矩存在, $X_1, X_2, \ldots, X_n$是其简单样本，$n>1$, 样本均值为 $\overline{X}$.
则对 X 期望μ估计时, （ ）.

(A) $(X_1 + \overline{X})/2$ 不是无偏, 但它比 $\overline{X}$ 更有效.

(B) $(X_1 + \overline{X})/2$ 比 $\overline{X}$ 更有效.

(C) 利用切贝雪夫定理，$(X_1 + \overline{X})/2$ 以概率收敛于 0，因此是μ的一致估计.

(D) $\overline{X}$ 比 $(X_1 + \overline{X})/2$ 更有效.

三、解答题（本题共 9 小题，洪分 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

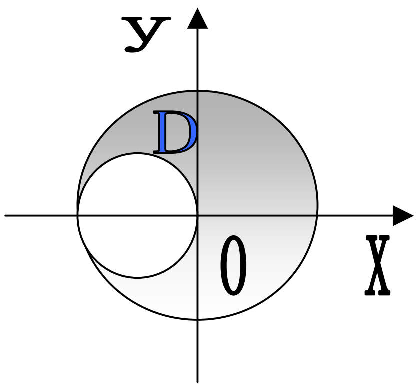
(15)（本题满分 8 分） 设 $f(x) - \cos^2 x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)dx$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$。

(16)（本题满分 8 分） 设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'(x) \neq 0, x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数。

(1) 试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$ 满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解。

(17)（本题满分 9 分） 求 $\iint\limits_D \left(\sqrt{x^2 + y^2} + y\right)d\sigma$, 其中 D 是由圆 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $(x+1)^2 + y^2 = 1$所围成的平面区域（如图）



(18)（本题满分 9 分） 求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(n+1)x^n$ 的和函数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和。

(19)（本题满分 8 分） 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$，记 $F(x)=\int_0^x xf(t)dt$。

(1) 求 $F'(x)$；

(2) 试证：在 $(0,1)$ 内至少存在一点，使 $\int_0^{\xi} f(x)dx=-\xi f(\xi)$

(3) 试证：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $2f(x_0)+x_0f'(x_0)=0$

.**(20)（本题满分 13 分）** 设 $A=\begin{pmatrix}-6 & 2 & 10\\ -4 & 1 & 7\\ -3 & 1 & a-2\end{pmatrix}$ 是齐次线性方程组 (I) 的系数矩阵，$\beta=\begin{pmatrix}b\\ c\\ 1\end{pmatrix}$ 是齐次线性方程组（II）的基础解系，已知线性方程组（I）与（II）同解.

(1) 求 a,b,c；　(2) 求非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

(21)（本题满分 13 分） 设 5 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2-5A+6E=0$，其中 E 是 5 阶单位矩阵，已知 $A-2E$ 的秩为 2，

(1) 求行列式 $|A-E|$ 的值；　(2) 判断 A 是否为正定矩阵？证明你的结论.

(22) (本题满分 13 分) 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0,2,2,0.5)$，则

(I) 求 $U=X^2$ 的密度函数.

(II) 求 $X+Y$ 与 $X-Y$ 的密度函数.

(III) $X+Y$ 与 $X-Y$ 是否不相关？说明理由.

(23)（本题满分 13 分）假设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda>0$ 的指数分布，随机变量

$$X_k=\begin{cases}0, & 若 Y\le k,\\ 1, & 若 Y>k,\end{cases}\qquad k=1,2$$

求 (I) X_1，X_2 的联合概率分布;

(II) X_1 和 X_2 的相关系数 r;

(III) 设参数 λ 未知，从总体 Y 抽样得到简单样本观测值 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，试求 λ 的最大似然估计值。