数学(四)试题

一、填空题（本题共6小题，每小题4分，满分24分，把答案填在题中横线上）

(1) 设 $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内可导，当 $x\neq 0$ 时，$f(x)\neq 0$，已知 $f(0)=0$，$f'(0)=2$，则

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{2}f(x)\right)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=\underline{\qquad\qquad}。$$

(2) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=2$，已知极限等式

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[f(x+1)-f(x-1)\right]$$，则常数 $c=$________。

(3) 设广义积分 $\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=A$，则广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=$_____。

(4) 若向量 $\beta=(0,k,k^2)$ 能由向量 $\alpha_1=(1+k,1,1)$，$\alpha_2=(1,k+1,1)$，$\alpha_3=(1,1,1+k)$ 唯一线性表示，则 k 应满足________ .

(5) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是3维列向量，记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)$，$C=2A-B$，已知 $|A|=1$，则 $|C|=$_______ .

(6) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1/3 & 若 x\in[0,1]\\ 2/9 & 若 x\in[3,6]\\ 0 & 其它,\end{cases}$$

若使得 $P(X\ge k)=1/3$，则 k 的取值范围是__________ .

二、选择题（本题共8小题，每小题4分，满分32分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 设函数 $f(x)$ 连续，在 x_0 可导，且 $f(x_0)=x_0^2$，$f'(x_0)>2x_0$，则存在 $\delta>0$，使得（　　）。

(A) 函数 $f(x)-x^2$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内单调增加。

(B) 函数 $f(x)-x^2$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内单调减少。

(C) 对任意的 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 有 $f(x)>x^2$。

(D) 对任意的 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 有 $f(x)>x^2$。

(8) 设$0<R<1$，则二重积分$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\dfrac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$等于（ ）。

(A) $4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x>0,y>0}}\dfrac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$。 (B) $2\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x>0}}\dfrac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$。

(C) $4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x>0,y<0}}\dfrac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$。 (D) 0.

(9) 定积分$\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{1}{x(1+x^2)^2}dx$的值为（ ）。

(A) $\ln\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{8}$。 (B) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{4}$。

(C) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{8}$。 (D) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{8}$。

(10) 已知函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某个邻域内连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{f(x,y)-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}=1$，则（ ）。

(A) 点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点 (B) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点

(C) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点 (D) 无法判断点$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点

(11) 设$z=h(x,y)$由方程$e^{xyz}=x+y+z$确定，则$h(x,y)$在点$P_0(0,1)$的两个偏导数$\dfrac{\partial h(0,1)}{\partial x}$和$\dfrac{\partial h(0,1)}{\partial y}$（ ）。

(A) 分别等于0和-1。 (B) 分别等于 -1和0。
(C) 都等于0。 (D) 都等于-1。

(12) 设λ_1,λ_2是 3 阶矩阵A的两个不同的特征值，α_1,α_2是A的属于λ_1的线性无关的特征向量，α_3是A的属于λ_2的特征向量，则$\alpha_1+A\alpha_3$，$A(\alpha_2-\alpha_3)$，$A\alpha_1+\alpha_3$线性相关的充分必要条件是（ ）。

(A) $\lambda_1=0$或$\lambda_1\lambda_2=1$ (B) $\lambda_2=0$或$\lambda_1\lambda_2=1$

(C) $\lambda_1\ne0$且$\lambda_1\lambda_2\ne1$ (D) $\lambda_2\ne0$且$\lambda_1\lambda_2\ne1$

(13) 设 $P(A|B)=P(B|A)=\frac{1}{4}$ ，$P(\overline{A})=\frac{2}{3}$. 则（ ）

（A）A 与 B 独立，且 $P(A\cup B)=5/12$;

（B）A 与 B 独立，且 $P(A)=P(B)$；

（C）A 与 B 不独立，且 $P(A\cup B)=7/12$；

（D）A 与 B 不独立，且 $P(A|\overline{B})=P(A|B)$.

（14） 对于任意二事件 A 和 B，（ ）

(A) 若 $AB\neq\emptyset$，则 A,B 一定独立.
(B) 若 $AB\neq\emptyset$，则 A,B 有可能独立.
(C) 若 $AB=\emptyset$，则 A,B 一定独立.
(D) 若 $AB=\emptyset$，则 A,B 一定不独立.

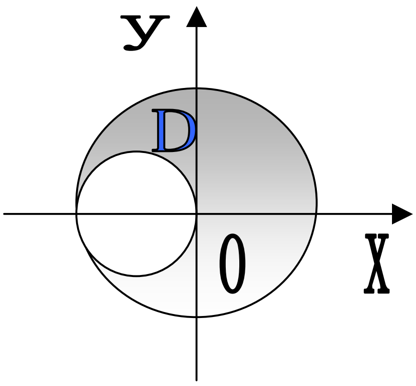
三、解答题（本题共 9 小题，洪分 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

（15）（本题满分 8 分） 设 $f(x)-\cos^2 x=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)dx$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$。

（16）（本题满分 8 分） 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导，$f(0)=1$，其反函数为 $g(x)$，且满足 $\int_x^{x+f(x)} g(t-x)dt=(2x+1)f(x)$，(1) 求 $\int_0^1 g(t)dt$；(2) 求 $\boldsymbol{f(x)}$.

（17）（本题满分 9 分） 求 $\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)d\sigma$, 其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域（如图）

[



（18）（本题满分 9 分） 某公司的一个研发部门研发甲乙两类高科技产品，甲类产品可有 x 个品种选择，乙类产品可有 y 个品种选择，限于研发能力，甲乙两类产品的品种需满足 $x+y\le 9$，若每季度研发甲乙两类产品对该公司产生的效益函数为 $f(x,y)=4+2x+2y-x^2-y^2$（百万元），问：

该研发部门每个季度应如何制定研发策略使其效益最大？该研发部门每个季度潜在的最大

风险（亏损最大）是什么？

（19）（本题满分 8 分）设 $f(x),g(x)$在[a,b]上连续，且满足

$$\int_a^x f(t)dt \ge \int_a^x g(t)dt,\quad x\in[a,b),\quad \int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt,$$

证明：$\int_a^b xf(x)dx \le \int_a^b xg(x)dx.$

.**(20)**(本题满分 13 分) 设 $A=\begin{pmatrix}-6 & 2 & 10\\ -4 & 1 & 7\\ -3 & 1 & a-2\end{pmatrix}$是齐次线性方程组(I)的系数矩阵，$\beta=\begin{pmatrix}b\\ c\\ 1\end{pmatrix}$

是齐次线性方程组（II）的基础解系，已知线性方程组（I）与（II）同解.

(1) 求 a,b,c ；(2) 求非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

（21）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{pmatrix}$的秩为 1，且 $(0,1,-1)^T$ 是 A 的一个特征向量，

(1) 求参数 a,b ；(2) 求可逆矩阵 P 和对角矩阵 D，使得 $P^{-1}AP=D$。

（22）（本题满分 13 分）设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0,2,2,0.5)$，则

(I) 求 $U=X^2$ 的密度函数.

(II) 求 $X+Y$ 与 $X-Y$ 的密度函数.

(III) $X+Y$ 与 $X-Y$ 是否不相关？说明理由.

（23）（本题满分 13 分）假设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda>0$ 的指数分布，随机变量

$$X_k=\begin{cases}0, & 若 Y\le k,\\ 1, & 若 Y>k,\end{cases}\qquad k=1,2$$

求 (I) X_1，X_2的联合概率分布;

(II) X_1和X_2的相关系数r;

(III) 设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 相互独立，且都与 Y 同分布，试求 n 足够大时 $\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$ 的近似分布（要求指明近似分布的参数）.