水木艾迪考研辅导班　教学与命题研究中心
清华大学数学系教授 刘坤林 俞正光　谭泽光　葛余博

数学(二)试题答案及解题分析

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

（1）设曲线 $y=f(x)$ 由 $x=\int_1^t \frac{\cos u}{u}du$ 及 $y=\int_1^t \frac{\sin u}{u}du$ 确定. 则该曲线当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时的切线斜率等于 1，此曲线介于 $t=1$ 与 $t=\frac{e}{2}$ 之间的弧长为_________。

【解】 该曲线当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时 的切线斜率为 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\tan t\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=1$；

曲线介于 $\boldsymbol{t=1}$ 与 $\boldsymbol{t=\frac{e}{2}}$ 之间的弧长为

$$L=\int_1^{\frac{e}{2}}\sqrt{(\frac{\cos t}{t})^2+(\frac{\sin t}{t})^2}\,dt=\int_1^{\frac{e}{2}}\frac{1}{t}dt=1-\ln 2。$$

（2）曲线 $y=\frac{(2+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为___________。

【解】 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2+x)^{3/2}}{x^{3/2}}=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2}{x}+1)^{3/2}=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}[\frac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{x}}-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{(2+x)^{3/2}-x^{3/2}}{\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x[(1+\frac{2}{x})^{3/2}-1]=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{x}=3$$

斜渐近线方程为 $y=x+3$。由 $g(x)=e^{2-x}-1=0$ 得到唯一零点 $x=2$。再由初等函数 $y=e^x$ 的性质可以得到

$$f(g(x))=\operatorname{sgn}g(x)=\begin{cases}1, & x<2\\ 0, & x=2\\ -1, & x>2\end{cases}$$

(3) 设符号函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$，$g(x)=e^{2-x}-1$，

则 $f(g(x))=$________。

【解】 由 $g(x)=e^{2-x}-1=0$ 得到唯一零点 $x=2$。再由初等函数 $y=e^{x}$ 的性质可以得到

$$f(g(x))=\operatorname{sgn}g(x)=\begin{cases}1, & x<2\\ 0, & x=2\\ -1, & x>2\end{cases}$$

(4) 若 $f(x)=2nx(1-x)^{n}$，记 $M_n=\max\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=$______ 。

【解】 $f'(x)=2n(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x)=0$，得到唯一驻点 $x=\dfrac{1}{n+1}$。

由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有最大值，可能的最大值点是在 $x=0,1$ 或 $\dfrac{1}{n+1}$ 取到，比较三点的函数值得到

$$M_n=f\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}M_n=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n}。$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{x}=2\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{-(x+1)}\right]^{-\frac{x}{x+1}}=2e。$$

(5) 设 $y=y(x)$ 在任意点 $x\in(0,+\infty)$ 满足 $\Delta y=(\dfrac{y}{x}+x\sin x)\Delta x+o(\Delta x)$，若 $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，则

$y(x)=$______。

【解】 $y=y(x)$ 在任意点 $x\in(0,+\infty)$ 满足 $\Delta y=(\dfrac{y}{x}+x\sin x)\Delta x+o(\Delta x)$

则 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，且 $y'=\dfrac{y}{x}+x\sin x$，于是得一阶线性微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' - \dfrac{1}{x}y = x\sin x \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases},$$

$$y' = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(\int x\sin x e^{-\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right) = x\left(\int \sin x dx + C\right) = x(-\cos x + C)$$

由 $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ 得 $C = 0$。于是 $y = -x\cos x$。

(6) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维列向量，记矩阵 $A = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B = (\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)$，$C = 2A - B$，已知 $|A| = 1$，则 $|C| =$ ______ .

【解】[方法 1]

$$\begin{aligned} C &= 2A - B \\ &= 2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) - (\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1) \\ &= (2\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2, 2\alpha_3 - \alpha_1) \\ &= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$|C| = |A|\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

[方法 2]

$$\begin{aligned} |C| &= |2A - B| \\ &= |2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) - (\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)| \\ &= |2\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2, 2\alpha_3 - \alpha_1| \\ &= |2\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_3| + |-\alpha_3, \alpha_2, -\alpha_1| \\ &= 4|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3| - |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3| \\ &= 3|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3| \\ &= 3 \end{aligned}$$

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\sqrt{\cos 2x}}{\sqrt{1+x^k}-1}=a\neq 0$,则（　）。

(A) $k=2, a=-2$。　　(B) $k=-2, a=-2$。

(C) $k=2, a=2$。　　(D) $k=-2, a=2$。

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\sqrt{\cos 2x}}{\sqrt{1+x^k}-1}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 2x-\cos 2x}{x^k(\cos 2x+\sqrt{\cos 2x})}$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^k(1+\frac{1}{\sqrt{\cos 2x}})}=2\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(2x)^2}{x^k(1+\frac{1}{\sqrt{\cos 2x}})}=a\neq 0,$$

得到 $k=2, a=-2$。答案：(A)。

(8) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有三阶连续导数，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x)=0$，则（　）。

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=0$。　(B) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0, \lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)\neq 0$。

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\neq 0, \lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=0$。　(D) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\neq 0, \lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)\neq 0$。

【解】 答案：(A)。当 $x>1$ 时，

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi),\quad \xi\in(x,x+1),$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{6}f'''(\eta),\quad \eta\in(x-1,x),$$

两式相减，并令 $x\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$，

两式相加，并令 $x\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=0$。

[注] 事实上，任意两点 $x+a, x+b$ 的值在点 x 展开都能得到结论。

(9) 函数 $f(x,y)=e^{x^2-y}(5-2x+y)$ 在全平面上（　）。

(A) 有最大值无最小值。　　(B) 有最小值无最大值。

(C) 既有最小值，也有最大值。　(D) 即无最小值，也无最大值。

【解】 $\begin{cases} f'_x(x,y)=e^{x^2-y}(10x-4x^2+2xy-2)=0 \\ f'_y(x,y)=e^{x^2-y}(2x-y-4)=0 \end{cases}$，

解得唯一驻点 $(1,-2)$

$f''_{xx}=e^{x^2-y}(20x^2-8x^3+4x^2y-12x+2y+10)$，

$f''_{yy}=e^{x^2-y}(-2x+y+3)$， $f''_{xy}=e^{x^2-y}(4x^2-2xy-8x+2)$

$A=f''_{xx}(1,-2)=-2e^3$， $B=f''_{xy}(1,-2)=2e^3$， $C=f''_{yy}(1,-2)=-e^3$

$\boldsymbol{AC-B^2=-2e^6<0}$，　　驻点 $(1,-2)$ 非极值点。

又在全平面可微，因此无最小值，也无最大值。答案：(D)。

(10) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf''(x)}{1-\cos x}=1$，则（　）。

(A) $f''(0)\neq 0$，但 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

(B) $f''(0)=0$ 且 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值。

(C) $f''(0)=0$，且 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

(D) $f''(0)\neq 0$ 且 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值。

【解】 答案为（C)。首先 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf''(x)}{1-\cos x}=1\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f''(x)=0$，又因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内有二阶连续导数，于是 $f''(0)=0$。其次，根据极限的保序性知道，在 x_0 的某去心邻域内，必有 $xf''(x)>0$，即知 $f''(x)$ 在 $x=0$ 两侧变号，于是可以断定 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。即只有选项(C)正确。

(11) 设 A 是一个装满水的半球形水池，半径为 R，若用水泵将 A 中的水全部泵出，则克服重力所作的功为（　）。

(A) $\frac{1}{2}\pi R^4$ 。(B) $\frac{1}{3}\pi R^4$ 。(C) $\frac{1}{4}\pi R^4$。(D) $\frac{1}{8}\pi R^4$。

【解】取半球的球心为坐标原点，竖直向下的直线为 x 轴，则克服重力所做的功为

$$W=\int_0^R \pi x(R^2-x^2)dx=\pi[\frac{1}{2}R^2x^2-\frac{1}{4}x^4]\Big|_0^R=\frac{1}{4}\pi R^4$$。

选(C)。

(12) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}, & x\neq 0,\text{且}x\neq 1\\ 0, & x=0\text{或}1\end{cases}$，则（　　）。

（A）$x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的可去间断点。

（B）$x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点；$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，但不为可去间断点。

（C）$x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点；$x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点。

（D）$x=0$，$x=1$ 均为 $f(x)$ 的第一类间断点。

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=0$，$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=-1$。答案为（B）。

(13) 设 λ_1,λ_2 是 3 阶矩阵 A 的两个不同的特征值，α_1,α_2 是 A 的属于 λ_1 的线性无关的特征向量，α_3 是 A 的属于 λ_2 的特征向量，则 $\alpha_1+A\alpha_3$，$A(\alpha_2-\alpha_3)$，$A\alpha_1+\alpha_3$ 线性相关的充分必要条件是（　）。

(A) $\lambda_1=0$ 或 $\lambda_1\lambda_2=1$　　(B) $\lambda_2=0$ 或 $\lambda_1\lambda_2=1$

(C) $\lambda_1\neq 0$ 且 $\lambda_1\lambda_2\neq 1$　　(D) $\lambda_2\neq 0$ 且 $\lambda_1\lambda_2\neq 1$

【解】$(\alpha_1+A\alpha_3,A(\alpha_2-\alpha_3),A\alpha_1+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&\lambda_1\\0&\lambda_1&0\\\lambda_2&-\lambda_2&1\end{pmatrix}$，

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，又 $\begin{vmatrix}1&0&\lambda_1\\0&\lambda_1&0\\\lambda_2&-\lambda_2&1\end{vmatrix}=\lambda_1(1-\lambda_1\lambda_2)=0$，

$\Leftrightarrow \lambda_1=0, or\ \lambda_1\lambda_2=1$，所以，选（A）。

(14)对 3 阶矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 先交换第 1 行和第 3 行，然后将第 2 列的 -2 倍加到第 3 列，得到矩阵 $-E$，其中 E 是 3 阶单位矩阵，则 $A=$（　）。

(A) $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & -2 \\ 1 & & \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} & & -1 \\ & -1 & 2 \\ -1 & & \end{pmatrix}$。　(B) $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & -2 \\ 1 & & \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} & & 1 \\ -2 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$。

(C) $\begin{pmatrix} & & -1 \\ & -1 & 2 \\ -1 & & \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} & & -1 \\ 2 & -1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}$。　(D) $\begin{pmatrix} & & 1 \\ -2 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} & & -1 \\ 2 & -1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}$。

【解】依题意

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} A^* \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & -2 \\ & & 1 \end{pmatrix} = -E$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & -2 \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} A^* = -E, \quad \begin{pmatrix} & & 1 \\ -2 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} A^* = -E,$$

$|A|^2=1$，所以，$|A|=\pm 1$.于是

$$A=\begin{pmatrix} & & 1 \\ -2 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \text{或} A=\begin{pmatrix} & & -1 \\ 2 & -1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}$$，故选（D）。

三、　解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

（15）（本题满分 11 分）设 $1<a_1<5$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n(5-a_n)}$，$(n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，并求此极限值。

【证】采用归纳法，先考虑 $\{a_n\}$ 的有界性，再考虑单调性。

$$a_2=\sqrt{a_1(5-a_1)}\le\frac{1}{2}(a_1+5-a_1)=\frac{5}{2},$$

假设$a_n<\dfrac{5}{2}$，则

$$a_{n+1}=\le\frac{1}{2}(a_n+5-a_n)=\frac{5}{2},$$

因此$\{a_n\}$有上界$\dfrac{5}{2}$。由

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{a_n(5-a_n)}}{a_n}=\sqrt{\frac{5}{a_n}-1}\ge\sqrt{2-1}=1$$

得到$\{a_n\}$单调增加，故$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$存在，记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$。

由极限的唯一性，对$a_{n+1}=\sqrt{a_n(5-a_n)}$两边取极限，由极限的唯一性得到$A=\sqrt{A(A-5)}$，解得$A=0$或$A=\dfrac{5}{2}$，再由极限保序性，得到$A\ge 1$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A=\dfrac{5}{2}$。

（16）（本题满分 11 分）求不定积分$\displaystyle\int\frac{\cos\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}dx$。

【解】 $$\int\frac{\cos\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}dx=\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}dx-\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}$$

$$=2\int\frac{d(\sin\sqrt{x})}{\sin^2\sqrt{x}}-2\int\frac{d(\sqrt{x})}{\sin^2\sqrt{x}}=\frac{-2}{\sin\sqrt{x}}+2\cot\sqrt{x}+C。$$

（17）(本题满分 11 分) 一个容器的内表面侧面由曲线$x=\sqrt{2+y^2}$ $(0\le x\le 2)$ 绕x轴旋转而成，外表面由曲线$x=\sqrt{2+y^2}$ 在点$(2,\sqrt{2})$的切线位于点$(2,\sqrt{2})$与x轴焦点之间的部分绕x轴旋转而成，此容器材质的密度为μ，求此容器自身的质量M及其内表面的面积S。

【解】 $y'(2)=\sqrt{2}$，切线为$y=\sqrt{2}+\sqrt{2}(x-2)$，与x轴交点为$(1,0)$

切线旋转后的体积为$V_1=\dfrac{2\pi}{3}$，

曲线旋转成的体积为$V_2=\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2}\pi y^2dx=\pi\int_{\sqrt{2}}^{2}(x^2-2)dx=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$

此容器自身的质量 $M=\mu(V_1-V_2)=\mu\frac{3}{4}\pi\left(3-\sqrt{2}\right)$

内表面积为 $S=\int_{\sqrt{2}}^{2}2\pi\sqrt{x^2-2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}\right)^2}\,dx=2\pi\int_{\sqrt{2}}^{2}\sqrt{2(x^2-1)}dx$

$$=\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{2}$$

$$=\left(2\sqrt{6}-2+\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+2}\right)\pi$$

(18)（**本题满分 12 分**）求解二阶微分方程的定解问题 $\begin{cases}\cos y\dfrac{d^2y}{dx^2}+\sin y(\dfrac{dy}{dx})^2=\dfrac{dy}{dx}\\ y(-1)=\dfrac{\pi}{6},\ y'(-1)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$。

【解】 令 $u=\frac{dy}{dx}$， $\frac{d^2y}{dx^2}=uu'$，原方程化为

$u\cos y\cdot u'+u^2\sin y=u$，　$u=0$，$y=C$ 不复合初值条件，舍去。

$u\neq 0$ 时，得到　$u'+u\tan y=\frac{1}{\cos y}$，

解为　$u=y'=\cos y(C_1+\tan y)$，　　由 $y(-1)=\frac{\pi}{6}, y'(-1)=\frac{1}{2}$，得 $\boldsymbol{C_1=0}$。

再解方程 $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\sin y}$ 得到　$\boldsymbol{\ln|\csc y-\cot y|=t+C_2}$，

由 $\boldsymbol{y(-1)=\frac{\pi}{6}}$ 得出 $C_2=1+\ln(2-\sqrt{3})$。定解问题之解为

$$\tan\frac{y}{2}=\frac{1-\cos y}{\sin y}=\sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}=(2-\sqrt{3})e^{x+1}。$$

(19)（**本题满分 12 分**）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$，记 $F(x)=\int_0^x xf(t)dt$。

(1) 求 $F'(x)$；

(2)试证：在(0,1)内至少存在一点，使$\int_0^{\xi} f(x)dx = -\xi f(\xi)$

(3)试证：在(0,1)内至少存在一点x_0，使得$2f(x_0)+x_0 f'(x_0)=0$

【解】(1) $F'(x)=\int_0^x f(t)dt + xf(x)$

(2) $F(0)=0,\quad F(1)=\int_0^1 f(x)dx = 0$，又因为$F(x)$在[0,1]上连续，$(0,1)$内可导

由 Roll 定理可得，存在一点$\xi\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=0$，即

$$\int_0^{\xi} f(x)dx = -\xi f(\xi)$$

(3) 因为$F'(0)=0,\quad F'(\xi)=0\quad \xi\in(0,1)$ 及$F'(x)$在[0,1]上连续，$(0,1)$内可导，由 Roll 定理可得，存在一点$x_0\in(0,\xi)$ 使得 $F''(x_0)=0$，即

$2f(x_0)+x_0 f'(x_0)=0$。

(20)（本题满分 10 分）设函数$f(x)$有反函数$g(x)$，且$f(a)=3, f'(a)=1$，$f''(a)=2$，

(1) 求$g''(3)$；(2)求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x(f(x)-f(a))}{\ln x-\ln a}$。

【解】　(1) 记$y=f(x)$，$g(x)$为$f(x)$的反函数，已经改变了变量记号，为利用反函数导数公式，可将$g(x)$易为$g(y)$。

由等式$f'(x)g'(y)=1$　两边关于x再次求导得到

$$f''(x)g'(y)+f'(x)g''(y)y'_x=0$$

或　　$f''(x)g'(y)+[f'(x)]^2 g''(y)=0$

注意到　　$g'(3)=\dfrac{1}{f'(a)}=1$，在上式中令$x=a$，应有$y=3$，

因此得到　　$g''(3)=-f''(a)g'(3)=-2$。

(2) 按导数定义的标准极限模式，采用加一项减一项的方法处理，

$$\lim_{x\to a}\frac{x(f(x)-f(a))}{\ln x-\ln a}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{x(x-a)}{\ln x-\ln a}$$

$$= f'(a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{x(x-a)}{\ln(1+\frac{x}{a}-1)}$$

$$= f'(a)\cdot a^2 = a^2。$$

（21）（本题满分 9 分）计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}|x+y|dxdy$。

【解】令 $D_1=\left\{(\rho,\varphi)\Big|-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4},\ 0\le\rho\le 1\right\}$；

$$D_2=\left\{(\rho,\varphi)\Big|\frac{3\pi}{4}\le\varphi\le\frac{7\pi}{4},\ 0\le\rho\le 1\right\};$$

$$D_3=\left\{(\rho,\varphi)\Big|-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ 0\le\rho\le 1\right\}$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}|x+y|dxdy=\iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy-\iint\limits_{D_2}(x+y)dxdy$$

$$=2\iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy-\iint\limits_{D=D_1\cup D_2}(x+y)dxdy$$

$$=2\iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy-0$$

$$=4\iint\limits_{D_3}x\,dxdy=4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^1\rho^2d\rho=\frac{4}{3}\sqrt{2}$$。答案：（$\frac{4}{3}\sqrt{2}$）。

(22)（本题满分 9 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}$ 的秩为 1，且 $(0,1,-1)^T$ 是 A 的一个特征向量，(1) 求参数 a,b；(2) 求可逆矩阵 P 和对角矩阵 D，使得 $P^{-1}AP=D$.

【解】(1)

$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}$，由 $r(A)=1\Rightarrow a=b$ 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Rightarrow a_2 = 1, a = \pm 1.$$又

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a-1=0 \\ 1-b=\lambda \\ b-1=-\lambda \end{cases},\ \Rightarrow a=b=1, \lambda=0.$$

（2）$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,特征值为 0,0,3.

$\lambda=0$的特征向量为： $(0,1,-1)^T, (-2,1,1)^T$ ；
$\lambda=3$的特征向量为： $(1,1,1)^T$.

令 $Q=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$及$x=Qy$,则有$f=3{y_3}^2$.

（3）$3{y_3}^2=1$表示两个平行的平面。

（23）参数a取何值时线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+(a+3)x_2+x_3=-2 \\ x_1+ax_2+x_3=a \\ x_1+x_2+ax_3=a^2 \end{cases}$$

有无穷多解？求出通解.

【解】

$$\begin{pmatrix} a & a+3 & 1 & -2 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ a-1 & 3 & 0 & -2-a \\ 0 & a-1 & 1-a & a(1-a) \end{pmatrix}$$

若$a=1$,则

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

通解为：　$x=(2,-1,0)^T+k(-1,0,1)^T$，k 为任意常数。

若 $a \neq 1$, 则

$$\to \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ a-1 & 3 & 0 & -2-a \\ 0 & 1 & -1 & -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 0 & 0 \\ a-1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -a \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -a \\ 0 & 1-a^2 & 3 & 2(-1+a) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 4-a^2 & -2+3a-a^3 \end{pmatrix}$$

当 $a=2$时，方程组无解.

当 $a=-2$时，

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

通解为：$x=(2,2,0)^T+k(1,1,1)^T$.

k 为任意常数。