清华大学数学系教授 刘坤林 俞正光 葛余博 谭泽光

数学(三)试题答案与解题分析

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

（1）设 $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内可导，当 $x\neq 0$ 时，$f(x)\neq 0$，已知 $f(0)=0$，$f'(0)=2$，则

$\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{2}f(x)\right)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=$______________。

【解】由标准极限 $$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{2}f(x)\right)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-\frac{1}{2}f(x)\right)^{\frac{-2}{f(x)}}\right]^{\frac{-\frac{1}{2}f(x)}{\ln(1+x)}},$$

根据复合极限定理，只需求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-f(x)}{2\ln(1+x)}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

由于 $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内可导，所以由导数定义得到

$-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-\dfrac{1}{2}f'(0)=-1$，因此 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{1}{2}f(x)\right)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=e^{-1}$。

(2) 设参数 $t>\dfrac{1}{16}$，差分方程 $y(k+2)-\dfrac{1}{2}y(k+1)+ty(k)=0$ 的通解为 $y(k)=a_k$，则当 t 的取值范围是 __________ 时，有 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=0$。

【解】特征方程为 $\lambda^2-\dfrac{1}{2}\lambda+t=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=\dfrac{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-4t}}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}\pm i\sqrt{4t-\frac{1}{4}}}{2}$

$y(k)=a_k=C_1\lambda_1^k+C_2\lambda_2^k$，当 $|\lambda_1|<1$ 且 $|\lambda_2|<1$ 时有 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=0$。

$|\lambda_{1,2}|^2=\dfrac{1}{4}[\dfrac{1}{4}+(4t-\dfrac{1}{4})]=t$，因此得到 $\dfrac{1}{16}<t<1$。

(3) 设函数 $y=x^{\sin x}(x>0)$，则 $dy\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=$______________。

【解】这类函数叫做幂指函数。首先两边取对数，得到隐函数方程$\ln y=\sin x\ln x$

再由隐函数求导法得 $\dfrac{1}{y}y'=\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}$,

从而 $y'=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x})$。

$dy|_{x=\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{2}{\pi}dx=dx$。

(4）若向量$\beta=(0,k,k^2)$能由向量$\alpha_1=(1+k,1,1)$，$\alpha_2=(1,k+1,1)$，$\alpha_3=(1,1,1+k)$唯一线性表示，则k应满足________ .

【解】$\begin{vmatrix}1+k & 1 & 1\\ 1 & 1+k & 1\\ 1 & 1 & 1+k\end{vmatrix}=k^2(k+3)\neq 0.$

应填$k\neq 0$且$k\neq -3$

(5）两名射手各向自己的靶独立射击，直到有一次命中时该射手才(立即)停止射击. 如两名射手每次命中概率分别为 1/3 和 1/4. 求两射手均停止射击时脱靶（未命中）总数的数学期望=___________.

【解】 X:射手i首次命中时的脱靶数，则停止射击时他的射击次数$X_i+1\sim Ge(p_i)$，

因此$P(X_i=k)=(1-p_i)^k p_i$， $i=1,2$，

且$E(X_I+1)=\dfrac{1}{p_i},i=1,2$，于是$EX_i=E(X_i+1)-1=\dfrac{1}{p_i}-1$，

故脱靶总数X_1+X_2的期望$EX_1+EX_2=\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}-2=3+4-2=5$。

答案为 5。

（6）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1/3 & 若 x\in[0,1]\\ 2/9 & 若 x\in[3,6]\\ 0 & 其它,\end{cases}$ 若使得 $P(X\geq k)=1/3$，则 k 的取值范围是______。

【解】 $f(x)=\begin{cases}1/3 若 x\in[0,1]\\ 2/9 若 x\in[3,6]\\ 0 \quad 其它,\end{cases}$

求 k 使得 $P(X\geq k)=1/3$，则 k 的取值范围是[4.5，6]

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

（7）设函数 $f(x)$ 连续，在 x_0 可导，且 $f(x_0)=x_0^2$，$f'(x_0)>2x_0$，则存在 $\delta>0$，使得（　　）。

(A) 函数 $f(x)-x^2$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内单调增加。

(B) 函数 $f(x)-x^2$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内单调减少。

(C) 对任意的 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 有 $f(x)>x^2$。

(D) 对任意的 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 有 $f(x)>x^2$。

答案：C。

【解】 $g(x)=f(x)-x^2$，$g(x_0)=0$，$g'(x_0)>0$，

$g'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=A>0$，由极限的保序性，存在 $\delta>0$，对任意的 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 有 $g(x)-g(x_0)=g(x)>A(x-x_0)>0$，即 $f(x)>x^2$。

注意：函数在一点导数的正负号不能得出 $(x_0-\delta,x_0)$ 或 $(x_0,x_0+\delta)$ 内的增减性结论，只能得出函数值的局部比较性质！

(8) 设 $0<R<1$，则二重积分 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\dfrac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$ 等于（ ）。

(A) $4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x>0,\,y>0}}\dfrac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$ 。 (B) $2\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x>0}}\dfrac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$ 。

(C) $4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x>0,\,y<0}}\dfrac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$ 。 (D) 0.

答案为 B

(9) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+2)}(x-a)^n$ 在点 $x_1=-2$ 条件收敛，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)^2}(x-a)^n$ 在点 $x_2=\dfrac{1}{2}$ 的收敛情况是（ ）。

(A) 绝对收敛． (B) 条件收敛． (C) 发散． (D) 不能确定．

【解】 只须注意到两个级数的收敛半径均为 $R=1$。$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+2)}(x-a)^n$ 的收敛区间中点 $a=-1$，或 $a=-3$，$|x_1-x_2|=\dfrac{5}{2}>2R$，点 $x_2=\dfrac{1}{2}$ 在收敛域的外部，因此选 (C)。

(10) 已知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{f(x,y)-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}=1$，则（ ）。

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点 (B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点 (D) 无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

答案：C 。

(11) 设 $z=h(x,y)$ 由方程 $e^{xyz}=x+y+z$ 确定，则 $h(x,y)$ 在点 $P_0(0,1)$ 的两个偏导数（　　）。

(A) 分别等于 0 和 -1。　　(B) 分别等于 -1 和 0。
(C) 都等于 0。　　(D) 都等于 -1。

答：D。

【解】 $e^{xyz}=(x+y+z)$， $e^0=1+z_0$， $z_0=0$，

对 x 取偏导数： $e^{xyz}(yz+xyz_x)=1+z_x$，

将 $p(0,1,0)$ 代入计算得到： $\dfrac{\partial h(0,1)}{\partial x}=z_x(p)=-1$。

(12) 设 3 阶矩阵 A 的行列式 $|A|<0$，A 的伴随矩阵满足 $\begin{pmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}A^*\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & -2\\ & & 1\end{pmatrix}=-E$，其中 E 是 3 阶单位矩阵，则 $A=$（　　）。

(A) $\begin{pmatrix} & & 1\\ & 1 & -2\\ 1 & & \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} & & 1\\ -2 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}-1 & & \\ 2 & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & 2\\ & & -1\end{pmatrix}$

[解] 依题意

$$\begin{pmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}A^*\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & -2\\ & & 1\end{pmatrix}=-E$$

$$\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & -2\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}A^*=-E,$$

$$\begin{pmatrix} & & 1\\ -2 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}A^*=-E, \qquad |A|^2=1$$

所以，$|A| = \pm 1$.于是 $A = \begin{pmatrix} & & 1 \\ -2 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ 或$A = \begin{pmatrix} & & -1 \\ 2 & -1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}$

故选（D)。

(13) 设λ_1,λ_2是 3 阶矩阵A的两个不同的特征值，α_1,α_2是A的属于λ_1的线性无关的特征向量，α_3是A的属于λ_2的特征向量，则$\alpha_1 + A\alpha_3$，$A(\alpha_2 - \alpha_3)$，$A\alpha_1 + \alpha_3$线性相关的充分必要条件是（ ）。

(A) $\lambda_1 = 0$或$\lambda_1\lambda_2 = 1$。 (B) $\lambda_2 = 0$或$\lambda_1\lambda_2 = 1$。

(C) $\lambda_1 \neq 0$且$\lambda_1\lambda_2 \neq 1$。 (D) $\lambda_2 \neq 0$且$\lambda_1\lambda_2 \neq 1$。

[解] $(\alpha_1 + A\alpha_3, A(\alpha_2 - \alpha_3), A\alpha_1 + \alpha_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 & 1 \end{pmatrix}$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，又$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda_1(1 - \lambda_1\lambda_2) = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0, or\ \lambda_1\lambda_2 = 1$$

所以，选（A)。

(14) 设总体 X 二阶矩存在, $X_1, X_2, \ldots, X_n$是其简单样本，$n>1$, 样本均值为$\bar{X}$.
则对 X 期望μ估计时, （ ）.

(A) $(X_1 + \bar{X})/2$ 不是无偏, 但它比$\bar{X}$ 更有效.

(B) $(X_1 + \bar{X})/2$ 比$\bar{X}$ 更有效.

(C) 利用切贝雪夫定理，$(X_1 + \bar{X})/2$ 以概率收敛于 0，因此是μ的一致估计.

(D) $\bar{X}$ 比$(X_1 + \bar{X})/2$ 更有效.

答案：D

三、解答题（本题共 9 小题，洪分 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

（15）（本题满分 **8** 分）设 $f(x)-\cos^2 x=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)dx$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$。

【解】 记 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=I$，再令 $2x=u$，则 $dx=\frac{1}{2}du$，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du=\frac{1}{2}I\text{。}$$

对等式 $f(x)-\cos^2 x=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)dx$ 两边取积分得到,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)-\cos^2 x]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{I}{2}dx=\frac{\pi}{4}I\text{. 即 } I-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=\frac{\pi}{4}I\text{,}$$

故 $I-\frac{\pi}{4}I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$,

因此 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{\pi}{4-\pi}$。

（16）（本题满分 12 分）设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且

$y'(x)\neq 0, x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数。

（1）试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

（2）求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解。

【解】（1）因为 $x(y(x))=x$，所以 $\frac{dx}{dy}y'=1$,

从而 $$\frac{d^2x}{dy^2}(y')^2+\frac{dx}{dy}y''=0\text{,}$$

且 $$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'},\quad \frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}\text{。}$$

代入原方程得 $y''-y=\sin x$。

（2）方程 $y''-y=\sin x$ 对应的齐次方程 $y''-y=0$ 的通解为

$$Y=C_1e^x+C_2e^{-x}。$$

设方程 $y''-y=\sin x$ 的特解为 $y^*=A\cos x+B\sin x$，

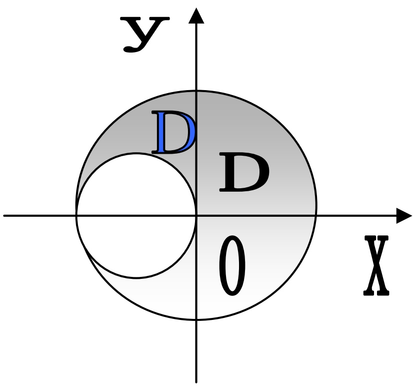
代入得 $A=0,B=-\frac{1}{2}$，故 $y^*=-\frac{1}{2}\sin x$，从而 $y''-y=\sin x$ 的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x。$$

由 $y(0)=0,y'(0)=\frac{3}{2}$，得 $C_1=1,C_2=-1$，故所求初值问题的解为

$$y=e^x-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x。$$

（17）（本题满分 9 分）求 $\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)d\sigma$, 其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域（如图）



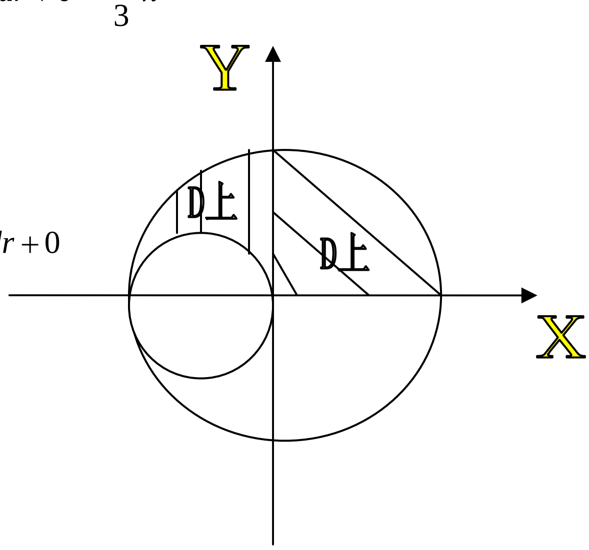
[解 1] $\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)d\sigma$

$$=\iint\limits_{D大圆}\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)d\sigma-\iint\limits_{D小圆}\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)d\sigma.$$

$$\iint\limits_{D大圆}\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)d\sigma$$

$$=\iint\limits_{D大}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma+\iint\limits_{D大}yd\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2dr+0=\frac{16}{3}\pi$$

$$\iint\limits_{D小圆}\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)d\sigma$$



$$=\iint\limits_{D小}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)d\sigma+\iint\limits_{D小}yd\sigma=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\theta\int_0^{-2\cos\theta}r^2dr+0$$

$$=\frac{32}{9},$$

所以 $\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)d\sigma=\frac{16}{9}(3\pi-2).$

[解 2]由积分区域对称性和被积函数的奇偶性

$$\iint_D y d\sigma = 0$$

原式

$$= \iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma + 0$$

$$= 2\left[\iint_{D上_1} \sqrt{x^2+y^2} d\sigma + \iint_{D上_2} \sqrt{x^2+y^2} d\sigma\right].$$

$$= 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r^2 dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_{-2\cos\theta}^{2} r^2 dr\right]$$

$$= 2\left[\frac{4}{3}\pi + \left(\frac{4}{3}\pi - \frac{16}{9}\right)\right] = \frac{16}{9}(3\pi - 2)$$

[注]： $\iint_{D上_1} \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$ 定限 1 分，计算 1 分。 $\iint_{D上_2} \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$ 定限 2 分，计算 2 分。

（18）（本题满分 9 分）求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n(n+1)x^n$ 的和函数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和。

【解】 $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n(n+1)x^n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} x^n$ 二阶导数有关，先考虑一阶导数。

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n x^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n x^{n-1}$$

$$= x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} x^n\right)' = x^2\left(\frac{x}{1+x}\right)' = \frac{x^2}{(1+x)^2}$$

再求一阶导数得到 $S(x) = \frac{2x}{(1+x)^3}$， $|x| < 1$。于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{27}\text{。}$$

注：逐项求导和逐项积分性质是幂级数的两个重要性质，是处理幂级数求和与展开问题的有效手段。

（19）（本题满分 8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$，记 $F(x)=\int_0^x xf(t)dt$。

(1) 求 $F'(x)$；

(2) 试证：在 $(0,1)$ 内至少存在一点，使 $\int_0^{\xi} f(x)dx=-\xi f(\xi)$

(3) 试证：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $2f(x_0)+x_0f'(x_0)=0$

【证】(1) $F'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)$

(2) $F(0)=0,\quad F(1)=\int_0^1 f(x)dx=0$，又因为 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导

由 Roll 定理可得，存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=0$，即

$$\int_0^{\xi} f(x)dx=-\xi f(\xi)$$

(3) 因为 $F'(0)=0,\quad F'(\xi)=0\quad \xi\in(0,1)$ 及 $F'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，

由 Roll 定理可得，存在一点 $x_0\in(0,\xi)$ 使得 $F''(x_0)=0$，即

$$2f(x_0)+x_0f'(x_0)=0。$$

.（20）（本题满分 13 分）设 $A=\begin{pmatrix}-6 & 2 & 10\\ -4 & 1 & 7\\ -3 & 1 & a-2\end{pmatrix}$ 是齐次线性方程组（I）的系数矩阵，$\beta=\begin{pmatrix}b\\ c\\ 1\end{pmatrix}$ 是齐次线性方程组（II）的基础解系，已知线性方程组（I）与（II）同解.

(1) 求 a,b,c；(2) 求非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

[解] (1)

$$\begin{vmatrix}-6 & 2 & 10\\ -4 & 1 & 7\\ -3 & 1 & a-2\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=7$$

$$\begin{cases} -6b+2c+10=0 \\ -4b+c+7=0 \\ -3b+c+5=0 \end{cases} \Rightarrow b=2, c=1.$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 & 2 \\ -4 & 1 & 7 & 1 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x=(0,1,0)^T+k(2,1,1)^T$$

(21)（本题满分 13 分）设 5 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2-5A+6E=0$，其中 E 是 5 阶单位矩阵，已知 $A-2E$ 的秩为 2，

(1) 求行列式 $|A-E|$ 的值； (2) 判断 A 是否为正定矩阵？证明你的结论.

[解] （1）由

$$(A-2E)(A-3E)=0$$
$$r(A-2E)+r(A-3E)\le 5$$

又 $r(A-2E)+r(A-3E)\ge r((A-2E)-(A-3E))=r(E)=5$

所以 $r(A-2E)+r(A-3E)=5, r(A-3E)=3.$

A 的特征值为：2，2，2，3，3。
$A-E$ 的特征值为：1，1，1，2，2。

于是 $|A|=1\times1\times1\times2\times2=4.$

（2） A 的特征值全为正数，所以 A 是正定矩阵。

(22)（本题满分 13 分）设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0,2,2,0.5)$，则

(I) 求 $U=X^2$ 的密度函数.

(II) 求 $X+Y$ 与 $X-Y$ 的密度函数.

(III) $X+Y$ 与 $X-Y$ 是否不相关？说明理由.

[解] (I) $Y=X^2$ 非负且为连续型，故 $y<0$ 时的密度为 0，现考 $y>0$ 的情形。 注意反函数有两支，

$h_j(y)=\pm\sqrt{y}$， $y>0$，且 $|h_j'(y)|=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$， $y>0$。 因此

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right] & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}。$$

$X\sim \mathrm{N}(0,2)$时， $f_X(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\dfrac{x^2}{4}\right\}$

代入即可得到 $y>0$ 时 $f_Y(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}y^{-1/2}\exp\left\{-\dfrac{y}{4}\right\}$。

(II) 由二元正态分布的性质，知 $X+Y$ 与 $X-Y$ 的均为正态的，

$E(X+Y)=0=E(X-Y)$，

$D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2Cov(X,Y)$

$=2DX\pm 2\rho\sigma_1\sigma_2=2\times 2\pm 2\times 0.5\times 2=4\pm 2$

故 $X+Y\sim \mathrm{N}(0,6)$, $X-Y\sim \mathrm{N}(0,2)$

(III)

$$E(X+Y)(X-Y)=EX^2-EY^2$$
$$=DX-DY=0=E(X+Y)\,E(X-Y)$$

因此 $X+Y$ 与 $X-Y$ 是不相关的。

（23）（本题满分 13 分）假设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda>0$ 的指数分布，随机变量

$$X_k=\begin{cases}0, & 若 Y\le k,\\ 1, & 若 Y>k,\end{cases}\qquad k=1,2$$

求 (I) X_1，X_2 的联合概率分布;

(II) X_1 和 X_2 的相关系数 r;

(III) 设参数 λ 未知，从总体 Y 抽样得到简单样本观测值 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，试求 λ 的最大似然估计值.

[解] (I) Y 的分布函数为 $F(y)=1-e^{-\lambda y}$ $(y>0)$, $F(y)=0$ $(y\le 0)$.

(X_1,X_2) 有四个可能值: (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)。

易见 $P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{Y\le 1,Y\le 2\}=P\{Y\le 1\}=1-e^{-\lambda}$

$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{Y\le 1,Y>2\}=0;$

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{Y>1,Y\le 2\}=P\{1<Y\le 2\}=e^{-\lambda}-e^{-2\lambda}$

$P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{Y>1,Y>2\}=P\{Y>2\}=e^{-2\lambda}$

于是，可将 X_1 和 X_2 联合概率分布列表如下:

X_1 \ X_2	0	1
0	$1-e^{-\lambda}$	0
1	$e^{-\lambda}-e^{2\lambda}$	$e^{-2\lambda}$

(II) $E(X_1X_2)=P\{X_1=1,X_2=1\}=p_{11}=e^{-2\lambda}$

$$E(X_1{}^2)=E(X_1)=P\{X_1=1\}=p_{1\bullet}=e^{-\lambda} \qquad DX_1=p_{1\bullet}(1-p_{1\bullet})=e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda})$$

$$E(X_2{}^2)=E(X_2)=P\{X_2=1\}=p_{\bullet 1}=e^{-2\lambda}, \qquad DX_2=p_{\bullet 1}(1-p_{\bullet 1})=e^{-2\lambda}(1-e^{-2\lambda})$$

$$Cov(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-EX_1EX_2=e^{-2\lambda}-e^{-3\lambda}$$

$$r=\frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{DX_1DX_2}}=\frac{e^{-2\lambda}-e^{-3\lambda}}{\sqrt{e^{-3\lambda}(1-e^{-\lambda})(1-e^{-2\lambda})}}=\frac{1}{\sqrt{1+e^{\lambda}}}.$$

(III) 似然函数

$$L(\lambda)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}[\lambda\exp\{-\lambda y_i\}] & \text{所有}y_i>0\\ 0 & \text{其余}\end{cases},$$

$$\ln L(\lambda)=\begin{cases}n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}y_i & \text{所有}y_i>0\\ -\infty & \text{其余}\end{cases}$$

由似然方程解得 $\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\bar{y}$，故 λ 的最大似然估计值 $\hat{\lambda}_L=\bar{y}$.