

数学(一)试题

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,把答案填在题中横线上)

(1) 由 $e^z = xy + yz + zx$ 确定的隐函数 $z = f(x, y)$ 存在的充分条件是_____ ,

曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(1, 1, 0)$ 处的切平面方程为_____ ,

$z = f(x, y)$ 在点 $(1, 1, 0)$ 处的梯度为_____。

(2) 定积分 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x(1+x^2)^2} dx$ 的值为_____。

(3) 设 $D_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq t^2, t > 0\}$, $f(x, y)$ 在 D_t 上连续, 在 D_t 内可微,

$f(0, 0) = 1$, D_t 的正向边界为 C_t 。若 $f(x, y)$ 在 D_t 上满足方程

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = kf(x, y)$, 设曲线 C_t 的外法矢量为 $\vec{n}_0(t)$, 则极限

$\lim_{t \rightarrow 0} \oint_{C_t} f_x dy - f_y dx =$ _____。

(4) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 其中 a 为常数, 已知存在3阶非零矩阵 B 满足 $AB = 0$,

则矩阵 A 的秩 $r(A) =$ _____。

(5) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$, 总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma^2)$, 且两个总体独立. 从总体 X 和 Y 分别抽取容量是 n_1 和 n_2 的简单随机样本, S_1^2 和 S_2^2 分别是它们的样本方差, 则 $D(S_1^2 + S_2^2) =$ _____。

(6) 设总体 X 二阶矩存在, $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$ 是其简单样本, 样本均值和方差分别为 \bar{X} 和 S^2 。

如果 X 服从 $(-\theta, \theta)$ 内均匀分布, $\theta > 0$, 则 θ 的矩估计 =_____。

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分,在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内。)

(7) 设函数 $f(x)$ 连续, 在 x_0 可导, 且 $f(x_0) = x_0^2$, $f'(x_0) > 2x_0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

()。

(A) 函数 $f(x) - x^2$ 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内单调增加。

(B) 函数 $f(x) - x^2$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内单调减少。

(C) 对任意的 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 有 $f(x) > x^2$ 。

(D) 对任意的 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 有 $f(x) > x^2$ 。

(8) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内有二阶导数, 且 $f(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{1-\cos x} = 100$, 则 ()。

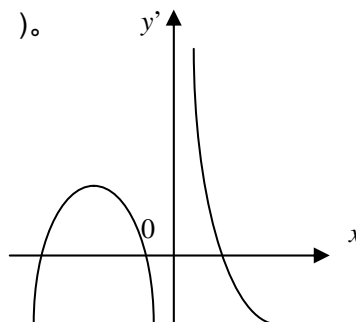
(A) $f''(0) \neq 0$, 且点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B) $f''(0)=0$ 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(C) $f'(0)=0$, $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(D) $f'(0)=0$, $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(9) 设 $y=f(x)$ 连续, 且 $f'(x)$ 如右图所示, 则 ()。



(A) $y=f(x)$ 有 3 个极小值点,

1 个极大值点, 1 个拐点

(B) $y=f(x)$ 有 2 个极小值点,

2 个极大值点, 无拐点

(C) $y=f(x)$ 有 2 个极小值点, 2 个极大值点, 1 个拐点

(D) $y=f(x)$ 有 1 个极小值点, 2 个极大值点, 1 个拐点

(10) 设 $f(x)$ 为严格单调可导函数, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数, 令

$F(x) = \int_0^{x-g(x)} f(x-t) dt$, 则 $F'(x) = ()$ 。

(A) $f(x) - \frac{x}{f'(x)}$ (B) $f(x) - \frac{g(x)}{f'(x)}$ (C) $f(x) - xg'(x)$ (D) $f(x) - \frac{g'(x)}{x}$

(11) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组中线性无关的是 ()

(A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ (B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

(C) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$ (D) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

(12) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

清华大学数学系教授 刘坤林 俞正光 谭泽光 葛余博

- (1) A 与 B 相似且合同 ; (2) A 与 B 与 C 相似 ; (3) A 与 B 与 C 合同 , 则 ()
 (A) (1)(2) 正确 , (3) 不正确 ; (B) (1)(3) 正确 (2) 不正确
 (C) (1)(2)(3) 都正确 ; (D) (1) 正确 (2)(3) 不正确
- (13) 设总体 $X \sim N(\mu, 0.5^2)$, $X_1 \cdots X_n$ 为简单随机样本 , 要使 μ 的 95% 的置信区间长度不超过 0.6 , 至少要取样本容量 n 为 ()
 (A) 10 (B) 11 (C) 8 (D) 3
- (14) 设三个事件 $A_i, i=1,2,3$ 两两独立, 令随机变量 X_i

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{如果 } A_i \text{ 发生} \\ -1 & \text{反之} \end{cases}, i=1,2,3$$

- 则 一定有()
 (A) $A_i, i=1,2,3$ 相互独立; (B) A_1A_2 与 A_3 独立;
 (C) $X_1 + X_2$ 与 X_3 相互独立; (D) $3e^{X_1}$ 与 $-X_3$ 相互独立.

三、解答题(本题 9 小题, 满分 94 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求解二阶微分方程的定解问题
$$\begin{cases} \cos y \frac{d^2 y}{dx^2} + \sin y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{dy}{dx} \\ y(-1) = \frac{\pi}{6}, y'(-1) = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

(16)(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 具有 2 阶连续导数, 且对任意的光滑有向封闭曲面 Σ , 都有

$$\oiint_{\Sigma} e^x [f'(x)dy \wedge dz - 2yf(x)dz \wedge dx - ze^x dx \wedge dy] = 0.$$

- (1) 证明对任意的 x 有 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = e^x$;
 (2) 当 $f(0) = 0, f'(0) = \frac{1}{3}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的表达式.

(17)(本题满分 10 分)

已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, 证明:

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6}.$$

(18)(本题满分 12 分)

已知积分 $\int_L (x + xy \sin x) dx + \frac{f(x)}{x} dy$ 与路径无关, $f(x)$ 为可微函数, 且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,

- (1) 求 $f(x)$;

(2) 对(1)中求得的 $f(x)$, 求函数 $u = u(x, y)$ 使得 $du = (x + xy \sin x)dx + \frac{f(x)}{x} dy$;

(3) 对(1)中求得的 $f(x)$, 求上述积分, 其中积分路径为从 $A(\pi, 1)$ 到 $B(2\pi, 0)$ 的任意路径。

(19)(本题满分 11 分)

设空间区域 Ω 由 $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ 与 $x = \sqrt{4 - y^2 - z^2}$ 围成, 求 Ω 的形心坐标。

(20)(本题满分 10 分)

当参数 p, t 为何值时, 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 + px_2 + 2x_3 + 7x_4 = -2 \\ x_1 - 6x_2 - x_3 - x_4 = t \end{cases}$$

有解, 无解? 有解时, 求通解.

(21)(本题满分 11 分)

设 A 是 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且

$$A\alpha_1 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \quad A\alpha_2 = 2\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3, \quad A\alpha_3 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3,$$

(1) 求矩阵 A 的特征值;

(2) 设 $B = 2A^* - E$, 其中 E 是 3 阶单位矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 求 B 的行列式 $|B|$ 的值。

(22)(本题满分 9 分)

用两个独立的同类设备分别组成串联、并联及备用 (即当一个接通的设备不能工作时系统立即自动接通另外一个备用设备) 系统. 如此类设备的寿命为参数是 λ 的指数分布, 试求系统的寿命分布.



(23)(本题满分 9 分)

3 个袋子各装 $r+b$ 只球, 其中红球 r 只. 今从第 1 个袋子随机取一球, 放入第 2 袋子, 再从第 2 袋再随机取一球, 放入第 3 袋子并从中随机取一球. 令

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{当第 } k \text{ 次取出红球,} \\ -1, & \text{反之.} \end{cases} \quad k = 1, 2, 3.$$

则 (I) 试求 X_3 的分布;

(II) 设 $r=b$, 求 X_1 和 X_2 的相关系数 ρ .