水木艾迪考研辅导班　教学与命题研究中心
清华大学数学系教授　刘坤林 俞正光 谭泽光 葛余博

数学(三)试题

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 差分方程 $x_{k+2}-x_{k+1}-6x_k=2$ 的通解为____________________ 。

(2) 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{3n-1}}{8^{n+1}n\ln^3 n}$ 的收敛域为_______________ 。

(3) 由 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge x$ 确定平面图形绕直线 $x=2$ 旋转而成的旋转体体积 $V=$________。

(4) 设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+tx_3^2+2tx_1x_2$，当 t 满足______时，f 为正定二次型。

(5) 对某射手打靶考核，有两次命中 6 环以下(不含 6 环)时立即淘汰出局．如果此射手每次命中 6 环及其以上的概率是 0.8，则他在第 4 次射击后即被淘汰的概率是 ________ 。

(6) 设总体 X 服从正态分布 $\mathrm{N}(\mu_1,\sigma^2)$，总体 Y 服从正态分布 $\mathrm{N}(\mu_2,\sigma^2)$，且两个总体独立．从总体 X 和 Y 分别抽取容量是 n_1 和 n_2 的简单随机样本，S_1^2 和 S_2^2 分别是它们的样本方差，则 $D(S_1^2+S_2^2)=$ ___________ .

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 若 $f(x)\in C^3[0,+\infty)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'''(x)=0$，则(　　　)

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=0$　　(B) $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)\ne 0$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\ne 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=0$　　(D) $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\ne 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)\ne 0$

(8) 设 $f(x)$ 为严格单调可导函数，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数，令 $F(x)=\int_0^{x-g(x)}f(x-t)\,dt$，则 $F'(x)=$（　　）。

(A) $f(x)-\dfrac{x}{f'(x)}$　(B) $f(x)-\dfrac{g(x)}{f'(x)}$　(C) $f(x)-xg'(x)$　(D) $f(x)-\dfrac{g'(x)}{x}$

(9) 当 $x=-1$ 时幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 条件收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^n$ （　）。

(A) 条件收敛　　(B) 绝对收敛

(C) 发散　　(D) 收敛性不能确定

(10) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内有二阶导数，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{1-\cos x}=100$，则（　）。

(A) $f''(0)\neq 0$，且点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B) $f''(0)=0$ 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(C) $f'(0)=0$，$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(D) $f'(0)=0$，$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(11) 二重积分 $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^y \sin(x^2+y^2)dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\sin(x^2+y^2)dx$ 在极坐标系下的表达式为（　）。

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{2}}r\sin r^2dr$　　(B) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\sin r^2dr$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\sin r^2dr$　　(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\sin r^2dr$

(12) 已知 4 元非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=a_{15}\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=a_{25}\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=a_{35}\\ a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4=a_{45}\end{cases}$$

的通解为 $x=(1,-1,0,1)^T+k(2,-1,1,0)^T$，其中 k 为任意常数.

记 $\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},a_{3i},a_{4i})^T$，$i=1,2,3,4,5$，则以下选项中错误的是（ ）

（A）α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性表示　　（B）α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

（C）α_3 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$ 线性表示　　（D）α_3 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性表示

(13) 设 A,B 分别是 $m\times n$ 矩阵和 $n\times m$ 矩阵．存在 $m\times n$ 矩阵 C 使得 $A=ABC$ 这一条件是 $r(AB)=r(A)$ 的（　　）条件。

(A) 充分但不必要　(B) 必要但不充分　(C)充分必要　(D)既不充分也不必要

(14) 设 (X_1,X_2) 服从二维正态分布 $N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0.5)$，令

$$Y_1=X_1-\tfrac{1}{2}X_2,\quad Y_2=\tfrac{1}{2}X_1-X_2.$$

则下面命题成立的是（　　）.

(A) Y_1和 Y_2都有正态分布，但是分布参数有不同

(B) Y_1和 Y_2有相同的正态分布，但不独立

(C) Y_1和 Y_2有相同的正态分布，且独立

(D) Y_1和 Y_2不能肯定是正态分布，但它们的数学期望和方差都分别相等

三、 解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

(15)（本题满分 11 分）

求定解问题 $\begin{cases} y''+4y'+4y=\cos 2x \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$ 的解。

(16)（本题满分 11 分）

求级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n[(n-2)!+n]}{(n-1)!}$ 的和。

(17)（本题满分 12 分）

某公司的一个研发部门研发甲已两类高科技产品，甲类产品可有 x 个品种选择，已类产品可有 y 个品种选择，限于研发能力，甲已两类产品的品种需满足 $x+y\le 9$，若每季度研发甲已两类产品对该公司产生的效益函数为 $f(x,y)=4+2x+2y-x^2-y^2$（百万元），问：

该研发部门每个季度应如何制定研发策略使其效益最大？该研发部门每个季度潜在的最大风险（亏损最大）是什么？

(18)（本题满分 12 分）

设某商品的需求函数为 $Q=20-2\ln P$, 其中价格 $P\in(e,e^{10})$, Q 为需求量。

(1) 求需求量对价格的弹性 $E_d\ (E_d>0)$;

(2) 推导 $\frac{dR}{dP}=Q(1-\mathrm{E}_d)$（其中 R 为收益），并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时，降低价格反而使收益增加。

(19)（本题满分 11 分）

已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ ，证明：$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6}$。

(20)（本题满分 9 分）

设 3 元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$，$(a>0)$．已知 1 是二次

型矩阵 A 的一个特征值，(1) 求 a；(2) 求在条件 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 下，$f(x_1,x_2,x_3)$ 的最大值与最大值点．

(21)（本题满分 10 分）

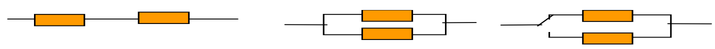
设齐次线性方程组 $(n\geq 2)$
$$\begin{cases} ax_1-bx_2+bx_3-bx_4+bx_5=0, \\ bx_1-ax_2=0, \\ bx_1+ax_3=0, \\ bx_1-ax_4=0 \\ bx_1+ax_5=0, \end{cases}$$

其中 $b\neq 0$．试讨论 a,b 取何值时，该方程组只有零解；a,b 取何值时，有非零解，

并在有非零解时，求方程组的通解．

(22)（本题满分 9 分）

用两个独立的同类设备分别组成串联、并联及备用（即当一个接通的设备不能工作时系统立即自动接通另外一个备用设备）系统．如此类设备的寿命为参数是λ的指数分布，试求系统的寿命分布．



(23)（本题满分 9 分）

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 取自正态母体 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 已知，

(I) 证明：$\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$ 是 σ 的无偏估计。

(II) $\left(\hat{\sigma}\right)^2$ 是否 σ^2 的无偏估计？如果是，对 σ^2 作估计时，它与样本方差 S^2 哪个更为有效？对上述两个问题说明理由。