

数学(四)试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分,把答案填在题中横线上)

(1) 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{(\sqrt{1+e^{-t}} - 1) \ln t}{1 - e^{1/t}} dt =$ _____。

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x < 0 \\ \ln(1+x), & \text{当 } x \geq 0 \end{cases}$, 则曲线 $y = y(x)$ 上与直线 $2x + y = 1$ 垂直的切线方程为 _____。

(3) 微分方程 $\begin{cases} y' - \frac{1}{x}y = x \sin x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$ 的解为 _____。

(4) 设 $\alpha = (2, 1, 1, 1)^T$, $\beta = (1, 2, 0, 0)^T$, 若 $A = \alpha\beta^T$, 则 $(A - 2E)^{-1} =$ _____, 其中 E 是 4 阶单位矩阵。

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 其中 a 为常数, 已知存在 3 阶非零矩阵 B 满足 $AB = 0$, 则矩阵 A 的秩 $r(A) =$ _____。

(6) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是独立同分布的随机变量, 方差为 $\sigma^2 > 0$. 令 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则 $D(X_1 - \bar{X}) =$ _____。

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分,在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内。)

(7) 设 $\delta > 0$, $f(x)$ 在 $[-\delta, \delta]$ 上有定义, $f(0) = 1$, 且满足

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x) + 2xf(x)}{x^2} = 0, \text{ 则函数 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处 ()}$$

- (A) 可微, 且 $f'(0) = 2$ 。 (B) 可微, 且 $f'(0) = 0$ 。
(C) 可微, 且 $f'(0) = 1$ 。 (D) 不可微。

(8) 设 $z = h(x, y)$ 由方程 $e^{xyz} = x + y + z$ 确定, 则 $h(x, y)$ 在点 $P_0(0, 1)$ 的两个偏导数

$\frac{\partial h(0,1)}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial h(0,1)}{\partial y}$ ()

- (A) 分别等于0和-1。 (B) 分别等于 -1和0。
 (C) 都等于0。 (D) 都等于-1。

(9) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内有二阶导数, 且 $f(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{1-\cos x} = 100$, 则 ()

- (A) $f''(0) \neq 0$, 且点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
 (B) $f''(0) = 0$ 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
 (C) $f'(0) = 0$, $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
 (D) $f'(0) = 0$, $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(10) 方程 $x^2 + 3xy - y^2 = 0$ 可以确定隐函数 $y = y(x)$ 的条件是 ()

- (A) $x \neq 0$ (B) $3y - 2x \neq 0$ (C) $2x + 3y \neq 0$ (D) $2y - 3x \neq 0$

(11) 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & x \neq 0 \\ g'(0) & x = 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶导数, 且

$g(0) = 0$, 则 $f(x)$ ()

(A) 在 $x=0$ 处不可导

(B) 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(x) = \begin{cases} \frac{x g'(x) - g(x)}{x^2} & x \neq 0 \\ g''(0)/2 & x = 0 \end{cases}$

(C) 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - x g'(x)}{x^2} & x \neq 0 \\ g''(0) & x = 0 \end{cases}$

(D) 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(x) = \begin{cases} \frac{g'(x) - x g''(x)}{x^2} & x \neq 0 \\ g''(0)/2 & x = 0 \end{cases}$

(12) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组中线性无关的是 ()

- (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ (B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$
 (C) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$ (D) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

(13) 设 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 且 A 与 B 二事件互斥, 下列关系式正确的是 ()

- (A) $P(B) = P(B|A)$ (B) $P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$
 (C) $P(\bar{B}) = \frac{P(A)}{P(A|B)}$ (D) $P(B) = 1 - P(A)$

(14) 设随机变量 X 的任一线性函数 $Y = aX + b, a \neq 0$. 则下面命题不成立的是 ().

- (A) 如果 X 是连续型随机变量, 则 Y 也是连续型随机变量;
 (B) 如果 X 是泊松分布, 则 Y 也是泊松分布;
 (C) 如果 X 是均匀分布, 则 Y 也是均匀分布;
 (D) 如果 X 是正态分布, 则 Y 也是正态分布;

三、解答题(本题 9 小题, 满分 94 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

计算广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$ 。

(16)(本题满分 10 分)

若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有二阶连续导数, 证明对任意的 $a < c < b$, 都存在 $\xi \in (a, b)$,

使得 $\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2} f''(\xi)$ 。

(17)(本题满分 11 分)

某公司的一个研发部门研发甲已两类高科技产品, 甲类产品可有 x 个品种选择, 已类产品可有 y 个品种选择, 限于研发能力, 甲已两类产品的品种需满足 $x + y \leq 9$, 若每季度研发甲已两类产品对该公司产生的效益函数为 $f(x, y) = 4 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ (百万元), 问: 该研发部门每个季度应如何制定研发策略使其效益最大? 该研发部门每个季度潜在的最大风险(亏损最大)是什么?

(18)(本题满分 11 分)

设 $f(x), g(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的非负连续函数, 且有相同的最大值。又有二次函数

$p(x) = ax^2 + bx + c$, 证明: $\exists \xi \in [0, 1]$, 使得 $p(f(\xi)) = p(g(\xi))$ 。

(19)(本题满分 11 分)

在曲线 $y = (x-1)^2$ 上点 $(2, 1)$ 处引该曲线的法线. 由该法线, x 轴及该曲线围成区域为 D , 求 D 绕 x 轴旋转一周生成的体积.

(20)(本题满分 10 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & -4a \\ 0 & 9 & -20 \\ 0 & 4 & -9 \end{pmatrix}$, 试讨论 a 取什么值时, 矩阵 A 与对角矩阵相似, 并求出可

逆矩阵 P 和对角矩阵 D , 使得 $P^{-1}AP = D$.

(21) (本题满分 9 分)

设齐次线性方程组 ($n \geq 2$)
$$\begin{cases} ax_1 - bx_2 + bx_3 - bx_4 + bx_5 = 0, \\ bx_1 - ax_2 = 0, \\ bx_1 + ax_3 = 0, \\ bx_1 - ax_4 = 0 \\ bx_1 + ax_5 = 0, \end{cases}$$
 其中 $b \neq 0$. 试讨论

a, b 取何值时, 该方程组只有零解; a, b 取何值时, 有非零解, 并在有非零解时, 求方程组的通解.

(22) (本题满分 10 分)

用两个独立的同类设备分别组成串联、并联及备用 (即当一个接通的设备不能工作时系统立即自动接通另外一个备用设备) 系统. 如此类设备的寿命为参数是 λ 的指数分布, 试求系统的寿命分布.



(23) (本题满分 12 分)

在计算机上作大型科学计算, 需对十进制的 x_j 的小数点后第 6 位作四舍五入, 得到 x_j 的近似数 y_j , 则误差 $\varepsilon_j = x_j - y_j$ 在区间 $(-0.5 \times 10^{-5}, 0.5 \times 10^{-5})$ 内随机取值.

视 ε_j 为此区间内的均匀分布随机变量, 累积误差为 $\eta_n = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j$. 试求

- (1) 试求 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 的分布;
- (2) 利用切贝雪夫不等式估计, 当 $n=10000$ 时给出 $|\eta_n|$ 不超过 0.0005 的概率的上界
- (3) 利用中心极限定理, 当 $n=10000$ 时以 99.7% 以上的把握给出 $|\eta_n|$ 的近似估计 (估计上界).