清华大学数学系教授　刘坤林　俞正光　谭泽光

数学(二)试题答案及解题分析

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

（1）极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\dfrac{(\sqrt{1+e^{-t}}-1)\ln t}{1-e^{1/t}}dt=$ ______________。

[解]：利用函数的单调性与积分的保序性（或比较性质）

$$0\le\left|\int_x^{2x}\frac{(\sqrt{1+e^{-t}}-1)\ln t}{1-e^{1/t}}dt\right|\le\int_x^{2x}\left|\frac{(\sqrt{1+e^{-x}}-1)\ln 2x}{1-e^{1/x}}\right|dt$$

$$=\int_x^{2x}\frac{(\sqrt{1+e^{-x}}-1)\ln 2x}{e^{1/x}-1}dt=\frac{x(\sqrt{1+e^{-x}}-1)\ln 2x}{e^{1/x}-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{1+e^{-x}}-1)\ln 2x}{e^{1/x}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\frac{1}{2}e^{-x})\ln 2x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\ln 2x}{2e^x}=0,$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\dfrac{(\sqrt{1+e^{-t}}-1)\ln t}{1-e^{1/t}}dt=0$。

答案为：0。

（2）已知 $f'(0)=a$，$f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan(5x^2)}=$ ________。

解 1：$$\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)}{\tan(5x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x-0}\cdot\frac{1-\cos x}{\tan(5x^2)}$$

$$=f'(0)\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\tan(5x^2)}=f'(0)\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{5x^2}=\frac{f'(0)}{10}=\underline{\frac{a}{10}}。$$

解 2：$$\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)}{\tan(5x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)}{5x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(0)+f'(0)(1-\cos x)+o\big((1-\cos x)\big)}{\tan(5x^2)}=\frac{a}{10}。$$

答案为：$\dfrac{a}{10}$。

（3）设函数 $z=f(x,y)$ 是由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定的,则函数 $z=f(x,y)$ 在点

$(1,0,-1)$ 的微分 $dz=$________ 。

答案为：$dx-\sqrt{2}dy$。

（4）设 A 是一个装满水的半球形水池，半径为 R，若用水泵将 A 中的水全部泵出，则克服重力所作的功为________________。

[解]：取半球的球心为坐标原点，竖直向下的直线为 x 轴，则克服重力所做的功为

$$W=\int_0^R \pi(R^2-x^2)xdx=\pi[\frac{1}{2}R^2x^2-\frac{1}{4}x^4]\Big|_0^R=\frac{1}{4}\pi R^4$$ 。

答案为：$\frac{1}{4}\pi R^4$。

（5）$f(x)=\dfrac{1-2e^x}{1+e^x}+|x|\sin\dfrac{1}{x}$ 的水平渐进线为________与__________ 。

答案为：$y=0(x\to-\infty)$，$y=-1(x\to+\infty)$。

（6）设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&-2\end{pmatrix}$，则矩阵 $(A^*-2E)(A+E)^{-1}=$__________. (其中 E 是 3 阶单位矩阵)

答案为：$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

（7）设函数 $f(x)$ 连续，在 x_0 可导，且 $f(x_0)=x_0^2$，$f'(x_0)>2x_0$，则存在 $\delta>0$，使得（　　）。

（A）函数 $f(x)-x^2$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内单调增加。

(B) 函数 $f(x)-x^2$ 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内单调减少。

(C) 对任意的 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 有 $f(x)>x^2$。

(D) 对任意的 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 有 $f(x)>x^2$。

[解]：$g(x)=f(x)-x^2$，$g(x_0)=0$，$g'(x_0)>0$，

$g'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=A>0$，由极限的保序性，存在 $\delta>0$，对任意的 $x\in(x_0,x_0+\delta)$

有 $g(x)-g(x_0)=g(x)>A(x-x_0)>0$，即 $f(x)>x^2$。

注意：函数在一点导数的正负号不能得出 $(x_0-\delta,x_0)$ 或 $(x_0,x_0+\delta)$ 内的增减性结论，只能得出函数值的局部比较性质！

（8）若 $f(x)\in C^3[0,+\infty),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'''(x)=0$，则

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=0$　　(B) $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0, \lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)\neq 0$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\neq 0, \lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=0$　　(D) $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\neq 0, \lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)\neq 0$

[解]：(泰勒公式)

当 $x>1$时，

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi),\quad \xi\in(x,x+1),$$
$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{6}f'''(\eta),\quad \eta\in(x-1,x),$$

两式相减，并令 $x\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，

两式相加，并令 $x\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=0$。

［注］事实上，任意两点 $x+a, x+b$ 的值在点 x 展开都能得到结论。

答案为：A

(9) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf''(x)}{1-\cos x}=1$，则（　）。

(A) $f''(0)\neq 0$，但 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B) $f''(0)=0$ 且 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $f''(0)=0$,且 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f''(0)\neq 0$ 且 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

[解]：(1) 首先 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf''(x)}{1-\cos x}=1\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f''(x)=0$，又因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内有二阶连续导数，于是 $f''(0)=0$。其次，根据极限的保序性知道，在 x_0 的某去心邻域内，必有 $xf''(x)>0$，即知 $f''(x)$ 在 $x=0$ 两侧变号，于是可以断定 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。即只有选项(C)正确。

答案为：C

(10) 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{(\sqrt{1+e^{-t}}-1)\ln t}{1-e^{1/t}}dt=$（　）.

(A) -1　(B)0　(C)1　(D) $-\dfrac{1}{2}$

答案为：B

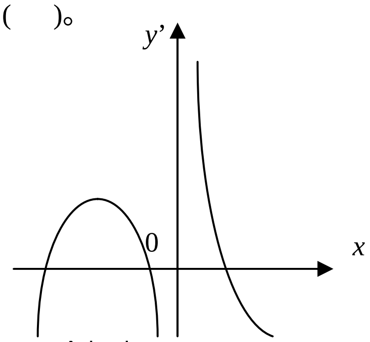
(11) 方程 $x^2+3xy-y^2=0$ 可以确定隐函数 $y=y(x)$ 的条件是（　）。

(A) $x\neq 0$　(B) $3y-2x\neq 0$　(C) $2x+3y\neq 0$　(D) $2y-3x\neq 0$

解：$2x+3y+3xy'-2yy'=0$，$y'=\dfrac{2x+3y}{2y-3x}$。

答案为：D

（12）设 $y=f(x)$ 连续，且 $f'(x)$ 如右图所示，则（　）。



(A) $y=f(x)$ 有 3 个极小值点，1 个极大值点，1 个拐点

(B) $y=f(x)$ 有 2 个极小值点，2 个极大值点，无拐点

(C) $y=f(x)$ 有 2 个极小值点，2 个极大值点，1 个拐点

(D) $y=f(x)$ 有 1 个极小值点，2 个极大值点，1 个拐点

答案为：C

（13）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

（1）A 与 B 相似且等价；（2）A 与 B 与 C 相似；（3）A 与 B 与 C 等价，则（　　）

（A）（1）（2）正确，（3）不正确；　（B）（1）（3）正确（2）不正确

（C）（1）（2）（3）都正确；　（D）（1）正确（2）（3）不正确

答案为：B

（14）设 A,B 为 n 阶可逆矩阵，且 $(AB)^2=E$，其中 E 是 n 阶单位矩阵，则以下选项中错误的是（　　）

$(A)\quad B^{-1}=A$　　$(B)\quad B^{-1}A^{-1}=AB$　　$(C)\quad (BA)^2=E$　　$(D)\quad A^{-1}=BAB$

答案为：B

三、 解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

（15）（本题满分 11 分）

设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'(x)\neq 0, x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数。

（1）试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

（2）求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解。

[解]：因为 $x(y(x))=x$，所以 $\frac{dx}{dy}y'=1$，

从而 $\frac{d^2x}{dy^2}(y')^2+\frac{dx}{dy}y''=0$，故 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$，$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$。

代入原方程，得 $y''-y=\sin x$。

（2）方程 $y''-y=\sin x$ 对应的齐次方程 $y''-y=0$ 的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$。

设方程 $y''-y=\sin x$ 的特解为 $y^*=A\cos x+B\sin x$，

代入得 $A=0, B=-\frac{1}{2}$，故 $y^*=-\frac{1}{2}\sin x$，从而 $y''-y=\sin x$ 的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x。$$

由 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$，得 $C_1=1, C_2=-1$，故所求初值问题的解为

$$y=e^x-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x。$$

（16）（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导 $f(0)=1$，其反函数为 $g(x)$，且满足与 $\int_x^{x+f(x)}g(t-x)dt=(2x+1)f(x)$，（1）求 $\int_0^1 g(t)dt$；（2）求 $f(x)$.

[解]：(1) $\int_0^1 g(x)dx=1$。

（2）对变限积分令 $t-x=u,\ dt=du$，则有

$\int_x^{x+f(x)}g(t-x)dt=\int_0^{f(x)}g(u)du=(2x+1)f(x)$，

关于 $\boldsymbol{x}$ 求导数，注意到 $g(f(x))=x$，得到

$xf'(x)=(2x+1)f'(x)+2f(x)$，

$(x+1)f'(x)+2f(x)=0$，因 $x\neq-1$，则有

$f'(x)=-\dfrac{2f(x)}{1+x}$，积分得到 $f(x)=\dfrac{C}{(1+x)^2}$，

又 $f(0)=1$，解出 $C=1$，于是 $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$。

（17）（本题满分 11 分）

一个容器的内表面侧面由曲线 $x=\sqrt{2+y^2}\ (0\le x\le 2)$ 绕 x 轴旋转而成，外表面由曲线 $x=\sqrt{2+y^2}$ 在点 $(2,\sqrt{2})$ 的切线位于点 $(2,\sqrt{2})$ 与 x 轴焦点之间的部分绕 x 轴旋转而成，此容器材质的密度为 μ，求此容器自身的质量 M 及其内表面的面积 S。

解：$y'(2)=\sqrt{2}$，切线为 $y=\sqrt{2}+\sqrt{2}(x-2)$，与 x 轴交点为 $(1,0)$

切线旋转后的体积为 $V_1=\dfrac{2\pi}{3}$，

曲线旋转成的体积为 $V_2=\int_{\sqrt{2}}^{2}\pi y^2dx=\pi\int_{\sqrt{2}}^{2}(x^2-2)dx=\dfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$

此容器自身的质量 $M=\mu(V_1-V_2)=\mu\dfrac{3}{4}\pi\left(3-\sqrt{2}\right)$

内表面积为 $S=\int_{\sqrt{2}}^{2}2\pi\sqrt{x^2-2}\cdot\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}\right)^2}dx=2\pi\int_{\sqrt{2}}^{2}\sqrt{2(x^2-1)}dx$

$$=\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{2}$$

$$=\left(2\sqrt{6}-2+\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+2}\right)\pi$$

（18）（本题满分 11 分）

计算二重积分 $I=\iint\limits_D\left|y-x^3\right|d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|-1\le x\le 1,-1\le y\le 1\}$。

[解]：$I=\iint\limits_D\left|y-x^3\right|d\sigma=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^3}^{1}(y-x^3)dy-\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{x^3}(y-x^3)dy$

$$=\int_{-1}^{1}[\frac{1}{2}(1-x^6)-x^3(1-x^3)dx-\int_{-1}^{1}[\frac{1}{2}(x^6-1)-x^3(x^3+1)]dx=\frac{16}{7}.$$

（19）（本题满分 11 分）

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，且在 $x_0\in(a,b)$ 处可导。数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足条件：

$$a<x_n<x_0<y_n<b,\ \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=x_0$$ 。

试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$ 。

[解]：（泰勒公式，无穷小的运算，或导数概念，极限与无穷小的关系）

由 $f(x)$ 在 x_0 处的可微性，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$ 于是

$$f(x_n)=f(x_0)+f'(x_0)(x_n-x_0)+o(x_n-x_0),$$

$$f(y_n)=f(x_0)+f'(x_0)(y_n-x_0)+o(y_n-x_0).$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[f'(x_0)+\dfrac{o(y_n-x_0)}{y_n-x_n}-\dfrac{o(x_n-x_0)}{y_n-x_n}\right].$

由因为 $a<x_n<x_0<y_n<b$，所以得到：

$$0\le\left|\frac{o(y_n-x_0)}{y_n-x_n}\right|\le\left|\frac{o(y_n-x_0)}{y_n-x_0}\right|,\ 0\le\left|\frac{o(x_n-x_0)}{y_n-x_n}\right|\le\left|x\frac{o(x_n-x_0)}{x_n-x_0}\right|,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=f'(x_0)$。

（20）（本题满分 10 分）

在曲线 $y=(x-1)^2$ 上点 $(2,1)$ 处引该曲线的法线.由该法线, x 轴及该曲线围成区域为 D,求 D 绕 x 轴旋转一周生成的体积.

[解]：法线方程为：$y=2-\dfrac{1}{2}x$，

方法一：对 x 积分：$V_x=\int_1^2\pi(x-1)^4dx+\int_2^4\pi(\frac{1}{2}(4-x))^2dx=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{3}=\frac{13\pi}{15}$

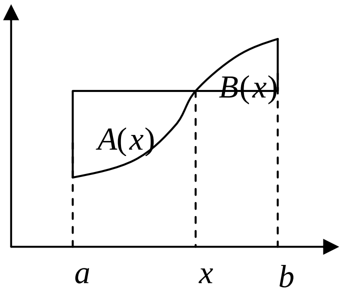
方法二：对 y 积分：

$$V_y=\int_0^1 2\pi(4-2y-\sqrt{y}-1)ydy=2\pi\int_0^1(-2y^2-y^{\frac{3}{2}}+3y)dy=2\pi(-\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{3}{2})=\frac{13\pi}{15}$$

(21)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)>0,\ f(a)>0$.

试证：对右图中的两个面积 $A(x)$ 和 $B(x)$，存在唯一的 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{A(\xi)}{B(\xi)}=99$。



[证明]： $A(x)=\int_a^x[f(x)-f(t)]dt=f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt$

$$B(x)=\int_x^b[f(t)-f(x)]dt=\int_x^b f(t)dt-f(x)(b-x)$$

令 $F(x)=A(x)-99B(x)$，则

$$F(a)=A(a)-99B(a)=-99\left[\int_a^b f(t)dt-f(a)(b-a)\right].$$

因为 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调上升. 又 $f(a)>0$，$f(x)>f(a),\quad x>a$，从而

$\left[\int_a^b f(t)dt-f(a)(b-a)\right]<0$, 即 $F(a)<0$.

同理，$F(b)=A(b)-99B(b)=f(b)(b-a)-\int_a^b f(t)dt>0$，

由连续函数零点的存在性可知存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{A(\xi)}{B(\xi)}=99$. 又

$$F'(x)=A'(x)-99B'(x)=f'(x)(x-a)-99f'(x)(x-b$$

$$=f'(x)[(x-a)-99(x-b)]$$

$$=f'(x)[-99(x-b)+(b-a)]>0,\quad a\le x\le b$$

所以 $\xi\in(a,b)$ 唯一。

(22)(本题满分 9 分)

当参数 p,t 为何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+3x_4=0\\ 2x_1-6x_2+x_3+4x_4=-2\\ 3x_1+px_2+2x_3+7x_4=-2\\ x_1-6x_2-x_3-x_4=t \end{cases}$$

有解，无解？有解时，求通解.

[解]：

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3 & 0\\ 2 & -6 & 1 & 4 & -2\\ 3 & p & 2 & 7 & -2\\ 1 & -6 & -1 & -1 & t\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & -1 & -2 & -2\\ 0 & p+6 & -1 & -2 & -2\\ 0 & -4 & -2 & -4 & t\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 5 & 2\\ 0 & -2 & -1 & -2 & -2\\ 0 & p+8 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+4\end{pmatrix}$$

若$t\neq -4$，方程组无解.

设$t=4$，若$p\neq -8$，则

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 5 & 2\\ 0 & -2 & -1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

通解为：$x=(-2,0,2,0)^T+k(-1,0,-2,1)^T$， k为任意常数.

若$t=4, p=-8$，则$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 5 & 2\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

通解为：$x=(2,1,0,0)^T+k_1\left(-2,-\frac{1}{2},1,0\right)^T+k_2(-5,-1,0,1)^T$， k_1,k_2为任意常数.

（23）（本题满分 9 分）

设 A 是 3 阶矩阵， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维向量，若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且 $A\alpha_1=-\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$, $A\alpha_2=2\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3$, $A\alpha_3=2\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3$,

（1）求矩阵A的特征值；

(2) 设$B=2A^*-E$，其中E是 3 阶单位矩阵，A^*是A的伴随矩阵，求B的行列式$|B|$ 的值。

解：(1) $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$

$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+5)$，$A$的特征值为 1，1，−5；

(2) $|A|=-5$，A^*的特征值为：－５，－５，１，B的特征值为：－１１，－１１，１ $|B|=121$