# 数学(一)试题

## 一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 已知 $f(0)=0$， $f'(0)=3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{\frac{1}{f(x)}}=$______________.

(2) 曲面 $z=2x^2+y^2$ 在任意一点 $(x,y,z)$ 处的法向量为______________，与平面 $x+2y+z=0$ 相平行的切平面方程为_____________。

(3) 微分方程 $y'''+4y''-21y'=0$ 的一般解为 ______________________。

(4) 设Ω是由曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=4$ 所围成的立体。则 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)dv=$_________。

(5) 设 $\alpha=(2,\ 1,\ 1,\ 1)^T$，$\beta=(1,\ 2,\ 0,\ 0)^T$，若 $A=\alpha\beta^T$，则 $(A-2E)^{-1}=$____，其中 $E$ 是 4 阶单位矩阵。

(6) 对某射手打靶考核，有两次命中 6 环以下(不含 6 环)时立即淘汰出局. 如果此射手每次命中 6 环及其以上的概率是 0.8，则他在第 4 次射击后即被淘汰的概率是 ________ 。

## 二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 若 $f(x)\in C^3[0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x)=0$，则

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=0$　　(B) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)\neq 0$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\neq 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=0$　　(D) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\neq 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)\neq 0$

(8) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf''(x)}{1-\cos x}=1$，则 (　　)。

(A) $f''(0)\neq 0$，但 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B) $f''(0)=0$ 且 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $f''(0)=0$，且 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f''(0)\neq 0$ 且 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2 & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 2-2x & \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$ ,将 $f(x)$ 展成周期 $T=2$ 的余弦级数,则 $S(-\frac{5}{2})$ 为(　　)。

(A) 0　　(B) $\frac{1}{4}$　　(C) $-\frac{3}{8}$　　(D) 1

(10) 设 $s$ 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，则 $\oiint_s \frac{2dzdy}{x\cos^2 x}+\frac{dxdz}{\cos^2 y}-\frac{dydx}{z\cos^2 z}=$ (　　)。

(A) $4\pi\tan 1$.　(B) $3\pi\tan 1$.　(C) $2\pi\tan 1$.　(D) $\pi\tan 1$.

(11) 设 $A,B$ 分别是 $m\times n$ 矩阵和 $n\times m$ 矩阵．存在 $m\times n$ 矩阵 $C$ 使得 $A=ABC$ 这一条件是 $r(AB)=r(A)$ 的（　　）条件。

(A) 充分但不必要　(B) 必要但不充分（C) 充分必要　(D) 既不充分也不必要

(12) 已知 4 元非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=a_{15}\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=a_{25}\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=a_{35}\\ a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4=a_{45}\end{cases}$$

的通解为 $x=(1,-1,0,1)^T+k(2,-1,1,0)^T$，其中 $k$ 为任意常数．

记 $\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},a_{3i},a_{4i})^T$， $i=1,2,3,4,5$，则以下选项中错误的是（ ）

(A) $\alpha_4$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性表示　　(B) $\alpha_4$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

(C) $\alpha_3$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$ 线性表示　　(D) $\alpha_3$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性表示

(13) 设 $P(A)>0$, $P(B)>0$，且 $A$ 与 $B$ 二事件互斥，下列关系式正确的是（　　）。

(A) $P(B)=P(B|A)$　　(B) $P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})$

(C) $P(\bar{B})=\frac{P(A)}{P(A|\bar{B})}$　　(D) $P(B)=1-P(A)$

(14) 设总体 X 二阶矩存在, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是其简单样本，n>1, 样本均值为 $\bar{X}$ . 则对 X 期望估计时, （　　）.

(A) $(X_1+\bar{X})/2$ 不是无偏, 但它比 $\bar{X}$ 更有效.

(B) $(X_1+\bar{X})/2$ 比 $\bar{X}$ 更有效.

(C) 利用切贝雪夫定理，$(X_1+\bar{X})/2$ 以概率收敛于 0，因此是一致估计.

(D) $\bar{X}$ 比 $(X_1+\bar{X})/2$ 更有效.

三、 解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

(15)（本题满分 11 分）

求级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n[(n-2)!+n]}{(n-1)!}$ 的和。

(16)（本题满分 12 分）

设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'(x)\neq 0, x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数。

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解。

(17)（本题满分 11 分）

设 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内有定义，且在 $x_0\in(a,b)$ 处可导。数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足条件：

$$a<x_n<x_0<y_n<b, \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=x_0。$$

试求 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$。

(18)（本题满分 12 分）

某公司的一个研发部门研发甲已两类高科技产品，甲类产品可有 $x$ 个品种选择，已类产品可有 $y$ 个品种选择，限于研发能力，甲已两类产品的品种需满足 $x+y\leq 9$，若每季度研发甲已两类产品对该公司产生的效益函数为 $f(x,y)=4+2x+2y-x^2-y^2$（百万元），问：该研发部门每个季度应如何制定研发策略使其效益最大？该研发部门每个季度潜在的最大风险（亏损最大）是什么？

(19)（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 是正值连续函数，$D$ 为圆心在原点的单位圆，$\partial\mathbf{D}$ 为 $D$ 的正向边界，证明：

(1) $\int_{\partial D} xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\int_{\partial D} -yf(x)dx+\frac{x}{f(y)}dy$ ；

(2) $\int_{\partial D} xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\geq 2\pi$ 。

(20)（本题满分 8 分）

设齐次线性方程组 $(n \ge 2)$ $\begin{cases} ax_1 - bx_2 + bx_3 + \cdots + (-1)^{n-1} bx_n = 0, \\ bx_1 - ax_2 = 0, \\ bx_1 + ax_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ bx_1 + (-1)^{n-1} ax_n = 0, \end{cases}$

其中 $b \ne 0$．试讨论 $a,b$ 取何值时，该方程组只有零解；$a,b$ 取何值时，有非零解，并在有非零解时，求方程组的通解．

(21)（本题满分 10 分）

设 3 元二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3$，$(a > 0)$．已知 1 是二次型矩阵 $A$ 的一个特征值，(1) 求 $a$；(2) 求在条件 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ 下，$f(x_1,x_2,x_3)$ 的最大值与最大值点．

(22)（本题满分 9 分）

设总体的分布函数为　$F(x;\lambda,\theta) = \begin{cases} 0, & \text{当} x \le \theta, \\ 1-(\theta/x)^{\lambda}, & \text{当} \theta < x. \end{cases}$ 其中 $\theta > 0, \lambda > 0$ 都是未知参数。设 $X_1,\cdots,X_n$ 为简单样本。

(1) 求 $\theta$ 和 $\lambda$ 的极大似然估计：$\hat{\lambda}_L$ 和 $\hat{\theta}_L$。

(2) 设 $\lambda$ 已知，上述 $\hat{\theta}_L$ 是否 $\theta$ 的无偏估计？说明理由。

(23)（本题满分 9 分）

用两个独立的同类设备分别组成串联、并联及备用（即当一个接通的设备不能工作时系统立即自动接通另外一个备用设备）系统. 如此类设备的寿命为参数是λ的指数分布，试求三个系统在时刻 $t$（>0）前失效的概率和三个系统的平均失效时间.