清华大学数学系教授　刘坤林 俞正光 谭泽光 葛余博

数学(二)试题

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足等式 $f(x)=\dfrac{1+\int_0^x f(t)dt}{2x+1}$，则 $f(x)=$__________。

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\dfrac{\ln t}{1+e^t}dt=$____________。

(3) 若 $z=\int_x^y e^{-\left(x^2+y^2+u^2\right)}du$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{(0,1)}=$_______ 。

(4) 函数 $f(x)=\dfrac{2x^2+e^{-x}}{x+1}$ 的斜渐近线为________。

(5) 二重积分 $\int_0^3 dx\int_{-x}^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2},2xy)dy$ 在极坐标系下先对 ρ ,而后对 φ 的累次积分表达式为_________________________。

(6) 设四元线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的秩为 3，η_1,η_2,η_3 是 $Ax=b$ 的 3 个解，已知 $\eta_1+\eta_2=(1,\ 1,\ 0,\ 2)^T$，$\eta_2+\eta_3=(1,\ 0,\ 1,\ 3)^T$，则 $Ax=b$ 的通解是________ 。

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 设 $\delta>0$，$f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上有定义，$f(0)=1$，且满足

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=0$，则函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　）。

(A) 可微，且 $f'(0)=2$。　　(B) 可微，且 $f'(0)=0$。

(C) 可微，且 $f'(0)=1$。　　(D) 不可微。

(8) 设 $z=h(x,y)$ 由方程 $e^{xyz}=x+y+z$ 确定，则 $h(x,y)$ 在点 $P_0(0,1)$ 的两个偏导数

$\dfrac{\partial h(0,1)}{\partial x}$和$\dfrac{\partial h(0,1)}{\partial y}$ [　]

(A) 分别等于 0和-1。　　(B) 分别等于 -1和0。

(C) 都等于 0 。　　(D) 都等于 -1。

(9) 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx$, $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)dx$ 则下列选项中正确的是（　　）。____

(A). $I_1>I_2$　(B). $I_1<I_2$　(C). $I_1=I_2$　(D).不能判定

(10) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)$, $f'_+(a)>0$，则下列命题错误的为（　）。

(A) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$

(B) 存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$

(C) 存在 $x_1\in(a,b)$，使得 $f(x_1)>f(b)$

(D) 存在唯一的 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$

(11) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx$, 则 $\int_0^1 f(x)dx=$ (　　)。

(A) $\dfrac{\pi}{4+\pi}$　(B) $\dfrac{\pi}{\pi-4}$　(C) $\dfrac{\pi}{4-\pi}$　(D) $\dfrac{1}{4-\pi}$

(12) 设二阶线性齐次常系数微分方程 $y''+by'+c^2y=0$ (c,b 为常数)的每一个解 $y(x)$ 在区间 $0<x<+\infty$ 有界,则实数 c , b 的取值范围是（　）.

(A) $b\geq 0, c\neq 0$　(B) $b\leq 0, b^2\geq 4c^2$

(C) $b\geq 0$, $b^2+c^2\neq 0$　(D) $b^2\geq 4c^2$

(13) 已知 4 元非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=a_{15} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=a_{25} \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=a_{35} \\ a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4=a_{45} \end{cases}$$

的通解为 $x=(1,-1,0,1)^T+k(2,-1,1,0)^T$，其中 k 为任意常数.

记 $\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},a_{3i},a_{4i})^T$， $i=1,2,3,4,5$，则以下选项中错误的是（　）

（A） α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性表示　　（B） α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

（C） α_3 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$ 线性表示　　（D） α_3 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性表示

(14) 设 A,B 分别是 $m\times n$ 矩阵和 $n\times m$ 矩阵．存在 $m\times n$ 矩阵 C 使得 $A=ABC$ 这一条件是 $r(AB)=r(A)$ 的（　　　）条件。

(A) 充分但不必要　(B) 必要但不充分　(C)充分必要　(D)既不充分也不必要

三、 解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

设 $y(x)=\arctan\sqrt{x^2-1}+\arcsin\frac{1}{x}$，　求 $y'(x)$。

(16) (本题满分 11 分)

计算广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$。

(17) (本题满分 11 分)

计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}|x+y|dxdy$。

(18) (本题满分 12 分)

设 函 数 $f(x)$ 二 阶 可 导 ， 若 $f''(\xi)>0$ ， 试 证 存 在 $a<\xi<b$ ，使 得

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$。

(19)（本题满分 11 分）

在半径为 R 的球内作内接正圆锥，试求其最大体积.

(20)（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$ 满足条件 $f(1)=1$,且有 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$,

证明： $\forall x\in[1,+\infty)$，$1\le f(x)\le 1+\dfrac{\pi}{4}$.

(21)（本题满分 10 分）

设有半径为 R，质量为 m 的圆柱形浮筒垂直放置水中，在重力和浮力的作用下处于平衡状态(浮筒密度小于 1,水足够深)，重力加速度为 g，现把浮筒向下压至顶部与水平面重合突然放开，已知阻力与浮筒运动速度成正比，比例常数为 $2k>0$。

(1) 列出浮筒运动满足的微分方程；

(2) k 满足什么条件时浮筒在水中作上下减幅振动，并求出此时方程的通解。

(22)（本题满分 9 分）

设线性方程组 $\begin{cases} x+y-z=1, \\ 2x+(a+3)y-3z=3, \\ -2x+(a-1)y+bz=a-1. \end{cases}$ 当 a,b 为何值时，方程组无解，有唯一解。

(23)（本题满分 9 分）

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2a & -4a \\ 0 & 9 & -20 \\ 0 & 4 & -9 \end{pmatrix}$，试讨论 a 取什么值时，矩阵 A 与对角矩阵相似，并求出

可逆矩阵 P 和对角矩阵 D，使得 $P^{-1}AP=D$.