数学(三)试题

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 函数 $y=y(x,z)$ 由方程 $xyz=e^{x+y}$ 所确定，则 $\dfrac{\partial y}{\partial x}=$______________。

(2) 若 $z=\int_x^y e^{-(x^2+y^2+u^2)}du$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{(0,1)}=$________ 。

(3) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}$ 的和为_________。

(4) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&a&1\\3&-1&1\end{pmatrix}$，其中 a 为常数，已知存在 3 阶非零矩阵 B 满足 $AB=0$，则矩阵 A 的秩 $r(A)=$________.

(5) 设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点(0,1), (1,0), (-1,0)为顶点的三角形区域上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1, & 若2Y\ge |X|,\\ -1, & 其他.\end{cases}$$

则其数学期望 $EU=$______，　方差 $DU=$__________ .

(6) 设总体 X 二阶矩存在，X_1，X_2，…，X_n 是其简单样本，样本均值和方差分别为 $\overline{X}$ 和 S^2．如果 X 服从 $(-\theta,\theta)$ 内均匀分布，$\theta>0$，则 θ 的矩估计 =____________。

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 设 $\delta>0$，$f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上有定义，$f(0)=1$，且满足

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=0$，则函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　）。

(A) 可微，且 $f'(0)=2$。　　(B) 可微，且 $f'(0)=0$。

(C) 可微，且 $f'(0)=1$。　　(D) 不可微。

(8) 设 $z=h(x,y)$ 由方程 $e^{xyz}=x+y+z$ 确定，则 $h(x,y)$ 在点 $P_0(0,1)$ 的两个偏导数

$\dfrac{\partial h(0,1)}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial h(0,1)}{\partial y}$ [　　]

(A)　分别等于 0 和 -1。　　(B)　分别等于 -1 和 0。

(C)　都等于 0。　　(D)　都等于 -1。

(9) 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}=1$，则（　）。

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点　　(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点　　(D) 无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

(10) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b),\ f'_+(a)>0$，则下列命题错误的为（　）。

(A) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$

(B) 存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$

(C) 存在 $x_1\in(a,b)$，使得 $f(x_1)>f(b)$

(D) 存在唯一的 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$

(11) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[1-\cos\dfrac{1}{n}+\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n\lambda}{n}\right)\right]$（　）。

(A)　条件收敛　　(B) 绝对收敛

(C)　发散　　(D) 收敛性与参数 λ 有关

(12) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

(1) A 与 B 相似且合同；(2) A 与 B 与 C 相似；(3) A 与 B 与 C 合同，则（　）

(A)　(1)(2) 正确，(3) 不正确；　　(B)　(1)(3) 正确 (2) 不正确

(C)　(1)(2)(3) 都正确；　　(D)　(1) 正确 (2)(3) 不正确

(13) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组中线性无关的是（　）

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

(C) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$　　(D) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

(14) 设三个事件 A_i，$i=1,2,3$ 两两独立，令随机变量 X_i

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{如果 } A_i \text{ 发生}\\ -1 & \text{反之}\end{cases},\quad i=1,2,3$$

则 一定有(　　　)

(A) A_i, $i=1,2,3$ 相互独立;　　　(B) A_1A_2 与 A_3 独立;

(C) X_1+X_2 与 X_3 相互独立;　　　(D) $3e^{X_1}$ 与 $-X_3$ 相互独立.

三、 解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

(15)（本题满分 11 分）

将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $x=1$ 处展开为幂级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2^n}$ 的和。

(16)（本题满分 11 分）

计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}|x+y|dxdy$。

(17)（本题满分 12 分）

若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续导数，证明对任意的 $a<c<b$,都存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

(18)（本题满分 12 分）

某城市的经济技术开发区现有一椭圆形环行快速道：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$a,b$ 为常数（公里），如要修一条高速公路，使之在椭圆上的点 $P(x_0,y_0)$, $(x_0,y_0\ge 0)$ 与椭圆相切，并确保过此点切线与坐标轴构成的三角形的面积最小，求 P 的坐标。

(19)（本题满分 11 分）

求微分方程 $xy''+y'=x^2+1$ 满足 $y(1)=\dfrac{1}{3}$, $y'(1)=\dfrac{4}{3}$ 的解。

(20)（本题满分 9 分）

当参数 p,t 为何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+3x_4=0\\ 2x_1-6x_2+x_3+4x_4=-2\\ 3x_1+px_2+2x_3+7x_4=-2\\ x_1-6x_2-x_3-x_4=t\end{cases}$$

有解，无解？有解时，求通解.

(21)（本题满分 10 分）

设 A 是 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维向量，若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且

$A\alpha_1=-\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$，$A\alpha_2=2\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3$，$A\alpha_3=2\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3$，

（1）求矩阵 A 的特征值；

（2）设 $B=2A^*-E$，其中 E 是 3 阶单位阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，求 B 的行列式 $|B|$ 的值。

(22)（本题满分 9 分）

3 个袋子各装 $r+b$ 只球，其中红球 r 只. 今从第 1 个袋子随机取一球，放入第 2 袋子，再从第 2 袋再随机取一球，放入第 3 袋子并从中随机取一球. 令

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{当第 } k \text{ 次取出红球}, \\ -1, & \text{反之}.\end{cases}\quad k=1,2,3.$$

(I) 试求 X_3 的分布;

(II) 求 $P(X_1=1|\,X_2=-1)$

(III) 设 $r=b$，求 X_1 和 X_2 的相关系数ρ.

(23)（本题满分 9 分）

设总体的分布函数为 $F(x;\lambda,\theta)=\begin{cases}0, & \text{当} x\le\theta, \\ 1-(\theta/x)^{\lambda}, & \text{当} \theta<x.\end{cases}$ 其中 $\theta>0,\lambda>0$ 都是未知参数。设 $X_1,\cdots,X_n$ 为简单样本。

（1）求 θ 和 λ 的极大似然估计：$\hat{\lambda}_L$ 和 $\hat{\theta}_L$。

（2）设 λ 已知，上述 $\hat{\theta}_L$ 是否 θ 的无偏估计？说明理由。