

强化部分

第五课 微积分

第 3 章 用导数研究函数性态例题 一元积分学 (1) 积分方法与技巧

1. 用导数研究函数性态例题 (续)

前一讲 例 38-43

$$\text{例 44 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

[解] 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$ 。

$$\begin{aligned} \text{例 45 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x \ln|x-a|}{\ln|e^x - e^a|} &= \lim_{x \rightarrow a} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln|x-a|}{\ln|e^x - e^a|} \\ &= e^{-a} \cdot \cos a \cdot e^a = \cos a . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 46 } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{2(x-1)} = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

$$\text{例 47 } \text{曲线 } y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} \text{ 的斜渐近线方程为 } \underline{\hspace{2cm}} . \quad x + \frac{3}{2}$$

2. 原函数概念

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $\forall x \in [a, b]$, 记 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$,

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则变上限积分 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 定义的函数在 $[a, b]$ 上连续。

注: $F(x)$ 不一定是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的原函数。

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则变上限积分 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 定义的函数在 $[a, b]$ 上可导, 且 $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$ 。(此时 $F(x)$ 一定是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数)。

证明: (1) $\forall x \in [a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则 $\Delta F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$,

因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 因此 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 即 $\forall x \in [a, b]$, 存在 $M > 0$ 使

得 $|f(x)| \leq M$, 于是

$$0 \leq |\Delta F(x)| \leq \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \right| \leq M|\Delta x|$$

由夹逼定理可得 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta F(x) = 0$, 因此 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上连续;

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi)}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} dt \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x) \end{aligned}$$

上式中 ξ 为 x 与 $x + \Delta x$ 之间的一个数, (上述证明用到积分中值定理)。

例 1 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x+1 & x > 0 \end{cases}$, 试确定 $f(x)$ 的一个原函数, 使 $F(0) = \frac{\pi}{4}$. 答案:

$$F(x) = \begin{cases} \arctan x + \frac{\pi}{4} & x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{\pi}{4} & x > 0 \end{cases} .$$

例 2 已知 $f'(\frac{1}{x}) = x^2$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \quad , \quad f(x) = -\frac{1}{x} + C .$$

例 3 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\sin x^2$, 常数 $a \neq 0$, 则 $\int f'(ax+b) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\frac{2(ax+b)}{a} \cos(ax+b)^2 + C .$$

例 4 设 $f'(\ln x) = 1+x$, $x > 0$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\text{令 } \ln x = t \quad , \quad f'(t) = 1 + e^t \quad , \quad f(x) = x + e^x + C .$$

例 5 求函数 $f(x) = \max\{1, x^2\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足 $F(0) = 1$ 的一个原函数.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3} & x < -1 \\ x+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3} & x > 1 \end{cases}$$

例 6 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ \cos x & x > 0 \end{cases}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 的全体原函数为 ()。

(A) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x + C_1 & x \leq 0 \\ \sin x + C_2 & x > 0 \end{cases}$. (B) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x & x \leq 0 \\ \sin x + C & x > 0 \end{cases}$.

(C) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x + C & x \leq 0 \\ \sin x + C & x > 0 \end{cases}$. (D) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x + C & x \leq 0 \\ \sin x & x > 0 \end{cases}$

【解】 应选 (C)。

例 7 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{2} & x < 0 \\ ax^2 + b & x \geq 0 \end{cases}$, 试确定常数 a 与 b ,

使得 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有原函数。

【解】 只当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续时有原函数。因此 $a \in R, b=0$ 。

例 8 设 $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 则 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ ()。

(A) 在 $x=1$ 点不连续。

(B) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 但在 $x=1$ 点不可导。

(C) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且满足 $F'(x) = f(x)$ 。

(D) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 但不一定满足 $F'(x) = f(x)$ 。

选(B)。

【正确分析】 首先, $f(x)$ 有第一类间断点, $F(x)$ 一定不是 $f(x)$ 的原函数。其次, $f(x)$ 有

第一类间断点, $f(x)$ 可积, $F(x)$ 连续; $F(x)$ 不可导, 故选(B)。(10秒OK!)

关于原函数的一些重要结论是：

结论 1 连续奇函数之原函数必为偶函数。

结论 2 连续偶函数之原函数必为奇函数与常数之和,

其中只有一个为奇函数 ($C=0$)。

结论 3 连续周期函数之原函数必为周期函数与线性数之和,

且周期不变。

连续周期函数 $f(x)$ 之原函数为周期函数的充要条件是

$$\int_0^T f(x)dx = 0, \text{ 其中 } T > 0 \text{ 为周期。}$$

结论 4 有第一类间断点的函数没有原函数。

结论 5 有第二类间断点的函数可以有原函数。

结论 6 变限积分表示的函数不一定是原函数。

例 9 不连续的函数也可能有原函数或不定积分, 例如函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{有原函数 } F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

但 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点. 值得指出的是导函数没有第一类间断点。

3. 凑微分法 (基本积分法-----重要基础)

$$\text{例 10 } \int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$\begin{aligned} \text{答案与提示: } & \int \frac{1}{2} \frac{d(x^2-6x+2)}{x^2-6x+13} + \int \frac{8}{(x-3)^2+4} dx \\ & = \frac{1}{2} \ln(x^2-6x+13) + 4 \arctan \frac{x-3}{2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 26. } & \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}} = \int \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x(1-\ln x)}} \\ & = 2 \int \frac{d\sqrt{\ln x}}{\sqrt{1-\ln x}} = 2 \arcsin \sqrt{\ln x} + C \end{aligned}$$

或令 $\ln x = t$, 原式 = $2 \arcsin \sqrt{t} + C$ 。

$$\text{例 11 } \int \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x}; \text{ 答案: } -\frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + \frac{1}{2} x + C$$

$$\begin{aligned} \text{【解】 (方法 1)} & \int \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2} \left[\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx + \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx \right] \\ & = -\frac{1}{2} \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} + \frac{1}{2} x = -\frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + \frac{1}{2} x + C. \end{aligned}$$

(方法 2) 令 $u = \tan \frac{x}{2}$, 则可化成有理函数的积分

$$\text{(方法 3)} u = \tan x, \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{u}{(1+u^2)(1+u)} du$$

(方法 4) 由 $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 设 $\theta = x + \frac{\pi}{4}$

例 11 $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

[解] $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx = -\int x^2 e^x d\left(\frac{1}{x+2}\right) = -\frac{x^2 e^x}{x+2} + x e^x - e^x + C$.

或 = $\int \frac{4 - 4(x+2) + (x+2)^2}{(x+2)^2} e^x dx$.

例 12 $\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$. 答案： $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \arctan^2 x + C$.

4. 分部积分 被积函数有 $\sin \ln x, \ln x, \arctan x, \arcsin x$, 以及 $f(x), g(x), f'(x)$ 等时, 分部积分是常用的方法. 这些函数本身比较复杂, 但其导数相对比较简单.

例 13 $\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

[解] $I = 2\sqrt{x} \ln|1+x| + 4(\arctan \sqrt{x} - \sqrt{x}) + C$.

对第二项：分子加 1 减 1，或令 $\sqrt{x} = t$.

例 14 $\int \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}} dx = \int \arcsin x d\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{dx}{1-x^2}$
 $= \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$

• $\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

• $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$

• $\int x e^x dx = x e^x - e^x + C$

• $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$

例 15 (1) $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$; 答案： $\ln(1-\sqrt{1-e^{2x}}) - x - e^{-x} \arcsin e^x + C$

例 15 (2) $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx$; 答案： $-\frac{e^{-2x}}{2} (\arctan e^x + e^{2x} \arctan e^x + 1) + C$

例 15 (3) $\int e^{2x} (\tan x + 1)^2 dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

原式 = $-\int \ln \sin x d(\cot x) = -\cot x \ln |\sin x| - \cot x - x + C$ 。

例 15 (4) $\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

原式 = $\int \frac{e^x(x+1)}{e^x x(1+xe^x)} dx = \int \frac{d(xe^x)}{e^x x(1+xe^x)} = \ln \left| \frac{xe^x}{1+xe^x} \right| + C$ 。

例 16 求 $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$ (由分部积分导致回归法)

原式 = $\frac{e^{\arctan x}(1+x)}{2\sqrt{1+x^2}} + C$ 。

5. 变量替换

$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, ($a > 0$), 令 $x = a \sin t$, $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$, $dx = a \cos t dt$ 。

$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a \cos t \cdot a \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt$

$= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C$ 。

$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$, ($a > 0$), 令 $x = a \tan t$ 。

$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$, 令 $x = a \sec t$ 。

例 17 计算不定积分 $\int \frac{dx}{x - \sqrt{1-x^2}}$ 。

[解] (方法 1) 令 $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$,

原式 = $\frac{1}{2} \ln \left| x - \sqrt{1-x^2} \right| - \frac{1}{2} \arcsin x + C$

(方法 2)

$I = \int \frac{\cos t}{\sin t - \cos t} dt = \int \frac{\cos t + \sin t - \sin t + \cos t - \cos t}{\sin t - \cos t} dt$

$= \ln \left| x - \sqrt{1-x^2} \right| - I - \arcsin x + C$ (回归法, 解出 I 即可)。

例 18 $\int \frac{dx}{1+3\sqrt{x-1}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

[提示] 令 $\sqrt{x-1} = t$, 原式 = $\int \frac{2tdx}{1+3t} = \frac{2}{3} \left[\sqrt{x-1} - \frac{1}{3} \ln(1+3\sqrt{x-1}) \right] + C$ 。

例 19 $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

[解] 令 $\sqrt{1+\ln x} = t$

$$\text{原式} = \int \frac{2t^2}{t^2-1} dt = 2t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = 2\sqrt{1+\ln x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1} \right| + C$$

例 20 求 $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx$ 。

$$\text{原式} = x + 2 \ln x - 4\sqrt{x+1} - 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C。$$

6. 有理分式的积分与三角有理式的积分

- 有理分式积分一定可以用初等函数表示

有理分式 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是多项式。

$$\text{代数知识告诉我们, } R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$$

其中 $P_1(x)$ 是多项式, $P_2(x)$ 是次数低于 $Q(x)$ 的多项式。

有理分式 $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ 可以表示成一些最简有理分式的和。(有理分式的最简分解)。

(1) $Q(x)$ 的一次因子 $(x-a)$ 使得有理分式 $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ 分解后含有 $\frac{A}{x-a}$ 型的最简有理分式;

(2) $Q(x)$ 的 k 重因子 $(x-a)^k$ 使得有理分式 $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ 有 $\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \dots, \frac{A_k}{(x-a)^k}$

型的最简有理分式;

(3) $Q(x)$ 的二次因子 $x^2 + px + q$ (其中 $p^2 - 4q < 0$) 使得有理分式 $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ 有

$$\frac{Mx + N}{x^2 + px + q} \text{ 型的最简有理分式;}$$

(4) $Q(x)$ 的 k 重二次因子 $(x^2 + px + q)^k$ (其中 $p^2 - 4q < 0$) 使得有理分式 $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ 有

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q}, \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2}, \dots, \frac{M_kx + N_k}{(x^2 + px + q)^k} \text{ 型的最简有理分式;}$$

• 三角有理分式积分一定可以用初等函数表示

(1) 三角有理分式 $R(\sin x, \cos x)$, 令 $t = \tan \frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, 则

$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$, 可将三角有理分式不定积分 $\int R(\sin x, \cos x) dx$ 化为关于 t 的有理分式积分。

(2) 若 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, 则变换 $t = \cos x$ 会简单一些;

若 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, 则变换 $t = \sin x$ 会简单一些;

若 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, 则变换 $t = \tan x$ 会简单一些;

$$\text{例 21 } \int \frac{2x+2}{(x^2+1)(x-1)} dx = 2 \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+1} + C.$$

$$\text{例 22 } \text{求 } \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{【解】原式} &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}x - 1) + C. \end{aligned}$$

$$\text{例 23 } \int \frac{dx}{x(x^6+4)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{【提示】原式 } \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x^5}{x^6+4} \right) dx = \frac{1}{24} \ln \frac{x^6}{x^6+4} + C.$$

$$\text{例 24 } \text{计算不定积分 } \int \frac{dx}{1+\sin x}.$$

$$\text{原式} = -\frac{2}{1+\tan \frac{x}{2}} + C.$$

$$\text{例 25 } \text{计算 } \int \frac{dx}{\sin x \cos 2x}.$$

$$\text{【解】 } \int \frac{dx}{\sin x \cos 2x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2} \cos x}{1-\sqrt{2} \cos x} \right| + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

7. 综合例题

$$\text{例 26 } \text{计算不定积分 } \int \frac{\cos \sqrt{x}-1}{\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}} dx.$$

答案与提示: 原式 = $2 \int \frac{d(\sin \sqrt{x})}{\sin^2 \sqrt{x}} - 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{\sin^2 \sqrt{x}} = \frac{-2}{\sin \sqrt{x}} + 2 \cot \sqrt{x} + C$ 。

例 27 计算 $\int \arctan(1 + \sqrt{x}) dx$

答案与提示: 原式 = $x \arctan(1 + \sqrt{x}) - \sqrt{x} + \ln(x + 2 + 2\sqrt{x}) + C$ 。

例 28 计算不定积分 $\int \frac{x \tan x}{\cos^4 x} dx$ 。

【解】原式 = $\frac{1}{4} x(1 + \tan^2 x)^2 - \frac{1}{4} (\tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x) + C$ 。

例 29 设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 求 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx$ 。

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx = -2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$$

例 30 求不定积分 $\int \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$ 。

【解】 $\int \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \frac{x e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) + C$ 。

例 31 计算不定积分 $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

【解】原式 = $2x\sqrt{e^x - 1} - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C$

例 32 计算 $\int \frac{x e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$ 。

【解】原式 = $2x\sqrt{1+e^x} - 4\sqrt{1+e^x} + 2 \ln \frac{\sqrt{1+e^x} + 1}{\sqrt{1+e^x} - 1} + C$

【特别提示】积分式内含有 $x^m e^x$, $x^m \ln x$, $\arcsin x$, $\arctan x$, $e^{ax} \sin bx$, 以及抽象函数 $f(x), f'(x), f''(x), G(x)$ 等, 应考虑采用分部积分法进行试验, 并且, 种类问题中常常只有此路一条, 最后还可能产生回归方法。

例 33 计算不定积分 $\int \frac{x \tan x}{\cos^4 x} dx$ 。

【解】原式 = $\frac{1}{4} x(1 + \tan^2 x)^2 - \frac{1}{4} (\tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x) + C$ 。

例 34 $\int \frac{\cos y dy}{\sin^2 y + \sin y - 6} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】 原式 = $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{\sin y - 2}{\sin y + 3} \right| + C$ 。

例 35 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 且满足 $F(1) = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi$,

又当 $x > 0$ 时有 $f(x)F(x) = \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$, 试求 $f(x)$ 。

【解】 $f(x) = (F(x))' = \frac{1}{\sqrt{2x}(x+1)}$ 。

例 36 对固定的正整数 m , 求积分 $I_n = \int x^m \ln^n x dx$ 关于 n 的递推公式

$$\begin{cases} I_n = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^n x - \frac{n}{m+1} I_{n-1} & (n \geq 1) \\ I_0 = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C & (m \text{ 为正整数}) \end{cases}$$

例 37 求 $I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 的递推计算公式。

$$I_n = \begin{cases} I_n = -\frac{x^{n-1}}{n} \sqrt{1-x^2} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} & (n \geq 2) \\ I_0 = \arcsin x + C \\ I_1 = -\sqrt{1-x^2} + C \end{cases} .$$

例 38 设常数 $a \neq 0, n$ 为正整数, 计算不定积分 $\int \frac{dx}{x(x^n + a)}$ 。

原式 = $\frac{1}{na} \ln \left| \frac{x^n}{x^n + a} \right| + C$ 。

例 39 求不定积分 $\int \arcsin x \cdot \arccos x dx$ 。

【解】 $\int \arcsin x \arccos x dx$

$$= x \arcsin x \arccos x + \sqrt{1-x^2} (\arccos x - \arcsin x) + 2x + C$$