清华大学数学系教授　刘坤林 俞正光 谭泽光 葛余博

数学(四)试题答案及解题分析

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

（1）设极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\sin x}^{x}\sqrt{1-t^2}dt}{x^n}$ 为非零实数，则 n= ________。

答案为：3。

（2）$\int\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=$__________________。

答案为：$2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$。

（3）设 $D=\{(x,y)\ |\ |x|+|y|\le 1\}$，则积分 $\iint\limits_{D}(x+|y|)\ d\sigma=$______________。

答案为：$\dfrac{2}{3}$。

（4）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，则行列式 $|A^*-2E|=$____________ 。其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵。

答案为：－8。

（5）$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&t&1\\-1&3&2\\2&1&-1\end{bmatrix}$ 当 $t=$________时，齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解。

答案为：$t=-1$。

（6）设随机变量 X 服从参数为（2，p）的二项分布，Y 服从参数为 $\lambda=2p$ 的泊松分布，已知 $P(X\ge 1)=\dfrac{3}{4}$，则 $P(Y\ge 1)=$__________。

答案为：$1-e^{-1}$。

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)dx$，则（　）。

(A) $I_1<1<I_2$。　(B) $I_1>1>I_2$。　(C) $I_1=I_2$。　(D) $I_1>I_2>1$.

答案为：A

(8) 设 $f(x)$ 为已知单调可导函数，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数，则 $\frac{d}{dx}\int_1^{f(x)}\frac{g(t)}{t}\sin t dt$ = (　) .

(A) $\frac{f(x)}{x}\sin(f(x))f'(x)$.　(B) $\frac{x}{f(x)}\sin(f(x))$.

(C) $\frac{x}{f(x)}\sin(f(x))f'(x)$.　(D) $\frac{x\sin x}{f(x)}f'(x)$.

答案为：C

(9) 设 $0<R<1$，则二重积分 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$ 等于（　）。

(A) $4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x>0,y>0}}\frac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$。　(B) $2\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x>0}}\frac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$。

(C) $4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x>0,y<0}}\frac{e^{x^2+y^2}}{1+xy}d\sigma$。　(D) 0.

答案为：B

(10) 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+a}\frac{\sin x}{x}dx=$（　）。

(A) 1.　(B) 0 .　(C) a .　(D) 不存在。

[解]：$\int_x^{x+a}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{a\sin\xi}{\xi}$，　$\xi\in(x,x+a)$，因此

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+a}\frac{\sin x}{x}dx=0=\lim_{\xi\to+\infty}\frac{a\cdot\sin\xi}{\xi}=0 .$$

答案为：B

(11) 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x|<1 \\ ax^4-bx^2+c, & |x|\ge 1 \end{cases}$ 在 $x=\pm1$ 点可导，则（　）。

(A) $b=2a, c=a$.　(B) $a=b=c$.　(C) $a=b=-c$　(D) $a=2b, c=\frac{1}{2}b$.

答案为：A

(12) 若 A 的伴随矩阵 A^* 为 n 阶非零矩阵，且 $AA^*=0$，则必有（　　）。

$(A)\ r(A)=n$　$(B)\ r(A)=n-1$　$(C)\ r(A)=n-2$　$(D)\ r(A)=0$

答案为：B

(13) 设随机变量 X 和 Y 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{3x}{4} & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2-x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

则 $P(X>1)$ 为（　　　）。

(A) $\frac{1}{4}$.　(B) $\frac{1}{3}$.　(C) $\frac{1}{2}$.　(D) $\frac{3}{4}$.

答案为：C

(14) 设随机变量 $X, E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2, (\sigma>0, \mu\text{常数})$，则对任意常数 c，必有（　　）

(A) $E(X-c)^2=E(X^2)-c^2$　(B) $E(X-c)^2=E(X-\mu)^2$

(C) $E(X-c)^2<E(X-\mu)^2$　(D) $E(X-c)^2\ge E(X-\mu)^2$

答案为：D

三、　解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

(15)（本题满分 10 分）

讨论对常数 k 取何值时函数 $f(x)=x\ln x+k$ 在定义域内的零点个数为：

(1) 0。(2) 1。 (3) 2。

[解]：$f'(x)=1+\ln x$，$x_0=e^{-1}$，

$x\in(0,\ e^{-1})$ 时 $f'(x)<0,\Rightarrow f(x)\downarrow$

$x\in(e^{-1},+\infty)$ 时 $f'(x)>0,\Rightarrow f(x)\uparrow$，

又因 $f(0^+)=k, f(e^{-1})=k-e^{-1}, f(+\infty)=+\infty$，

且 $f(e^{-1})=k-e^{-1}$ 为极小值，所以

当 $k\le 0$ 时，$f(x)$ 有一个零点 $x_1\in(\frac{1}{e},\ +\infty)$

当 $0<k<e^{-1}$ 时，$f(x)$ 有两个零点 $x_1\in(0,\ \frac{1}{e})$ 与 $x_2\in(\frac{1}{e},\ +\infty)$

当 $k=e^{-1}$ 时，$f(x)$ 有一个零点 $x_1=\frac{1}{e}$，

当 $k>e^{-1}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 内无零点。

（16）（本题满分 11 分）

用薄钢板制做一个容积为 $4(m^3)$ 的有底无盖长方体箱子，如何取长方体箱子的长、宽、高的值，才能使得制作箱子所用的钢板面积最省?

[解]：设长方体箱子的长、宽、高分别为 x,y,z，则制作箱子所用的钢板面积为

$$f(x,y,z)=xy+2xz+2yz,$$

长方体箱子的容积为 xyz。根据题意，x,y,z 是条件极值问题

$\begin{cases}\min(xy+2xz+2yz)\\ xyz=4\end{cases}$ 的解。令 $L(x,y,z,\lambda)=xy+2xz+2yz-\lambda(xyz-4)$，

考虑方程组 $\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=y+2z-\lambda yz=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=x+2z-\lambda xz=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=2x+2y-\lambda xy=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=-xyz+4=0\end{cases}$，

其中前三个方程分别乘以 x,y,z，得 $\begin{cases}xy+2xz=\lambda\ xyz\\ xy+2yz=\lambda\ xyz\\ 2xz+2yz=\lambda\ xyz\end{cases}$

由此得到　$xy+2xz=xy+2yz=2xz+2yz$。

因此有 $x=y=2z$。由 $xyz=4$,得　$x=y=2$, $z=1$。

根据问题的实际意义，肯定存在使得面积最省的长、宽、高。另一方面,这样的长、宽、高又必须满足函数 $F(x,y,z,\lambda)$ 驻点方程，且满足方程的解又只有一组，因此，当长、宽、高分别为 $2m$, $2m$,$1m$ 时，所用钢板面积最省（用料 $12m^2$）。

（17）（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 可微，$f(-\frac{\pi}{2})=1$, $f(\frac{\pi}{2})=-1$，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，且满足

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{f(x)} g(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1+\sin 3t}{1+\cos t}dt$$，求积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

[解]：由给定等式两端取导数，注意到 $g(f(x))=x$，

则有 $xf'(x)=\dfrac{1+\sin 3x}{1+\cos x}$，

记 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$，对前等式在 $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ 上取积分得到

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin 3x}{1+\cos x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=2\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

而右端为

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xdf(x)=xf(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}f(\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}f(-\frac{\pi}{2})-I=-I$$

最后得到　$I=-2$.

（18）（本题满分 11 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上非负，$f(0)=0,\ f''(x)>0,\ (\mathrm{X},\mathrm{Y})$ 为 $y=f(x),\ y=0,\ x=a$　围成区域之形心，试证　$\mathrm{X}>\dfrac{2a}{3}$.

[证]：$X=\dfrac{\int_0^a xf(x)dx}{\int_0^a f(x)dx}$，要证明 $X>\dfrac{2}{3}a$，即证明 $\int_0^a\left(x-\dfrac{2}{3}a\right)f(x)dx>0$

令 $F(x)=\int_0^x\left(t-\dfrac{2}{3}x\right)f(t)dt$，则 $F(0)=0$，只须证 $F(a)>0$，

$$F'(x)=\frac{1}{3}xf(x)-\frac{2}{3}\int_0^x f(t)dt\text{，且 }F'(0)=0\text{，}$$

$$F''(x)=\frac{1}{3}xf'(x)-\frac{1}{3}f(x)$$

$$=\frac{1}{3}xf'(x)-\frac{1}{3}xf'(\xi)\text{，}$$

其中 $\xi\in(0,x)$。由 $f''(x)>0$ 可知 $f'(x)$ 单调增，于是 $f'(x)>f'(\xi)$，
则有 $F''(x)>0$，且 $F'(x)>0$，而 $F(0)=0$，所以 $F(x)>0$，
令 $x=a$，即有 $F(a)>0$.

（19）（本题满分 12 分）

假设区域 D 由曲线 $y=px^3(y>0,P>0)$ 及其过点 $(1,p)$ 的切线与 x 轴围成，若此区域的形心为 (X,Y)，

（1）求 X 的值；

（2）求 p 的值，使 D 绕 y 轴旋转一周而生成的旋转体体积为 $V_y=\dfrac{7}{135}\pi$。

[解]：(1) $y'|_{x=1}=3px^2|_{x=1}=3p$，切线为 $y=p+3p(x-1)$，它与 x 轴的交点为 $(2/3,0)$；

区域 D 面积为 $A=\int_0^1 px^3dx-\dfrac{1}{6}p=\dfrac{1}{12}p$，静力矩为

$$M_y=\int_0^1 px^3\cdot xdx-\int_{2/3}^1[p+3p(x-1)]xdx$$

$$=\frac{1}{5}p-\int_{2/3}^1(3px^2-2px)dx=\frac{1}{5}p-(1-\frac{8}{27}-1+\frac{4}{9})p=\frac{7}{135}p$$

因此 $X=\dfrac{84}{135}=\dfrac{28}{45}$。

（2）由古耳金定理得到（亦可直接积分）

$$V_y=2\pi XA=2\pi\frac{84}{135}\cdot\frac{1}{12}p=\frac{14}{135}\pi p=\frac{7}{135}\pi\text{，解出 }p=\frac{1}{2}\text{。}$$

（20）（本题满分 10 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{pmatrix}$　$b=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ 已知齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间是二维的，求参数

a 及方程组 $AX=b$ 的通解。

[解]：$$(Ab)=\begin{pmatrix}1&2&1&2&3\\0&1&a&a&2\\1&a&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&2&3\\0&a-2&-1&-1&-2\\0&a-1&a-1&a-1&0\end{pmatrix}$$

$$a=1\ \text{时}(Ab)\to\begin{pmatrix}1&2&1&2&3\\0&-1&-1&-1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\text{有无穷多解}$$

$$X=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}\qquad (k_1,k_2\in R)$$

(21)（本题满分 10 分）

设 A 是３阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维向量组，且 $A\alpha_1=\alpha_2$， $A\alpha_2=\alpha_3$，

$A\alpha_3=\alpha_1$，

（1）证明：$A^3=E$，其中 E 是单位矩阵；

（2）若 $\alpha_1=(1,\ 0,\ 1)^T$， $\alpha_2=(0,\ 1,\ 1)^T$， $\alpha_3=(1,\ 1,\ 0)^T$，求 A。

[解]：(1) $$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$A^3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}^3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)E$$

所以 $A^3=E$。

(2) $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1)$

$$A=(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

(22)（本题满分 11 分）

设二维随机变量（X, Y），在 G 域$=\left\{(x,y)\left|\begin{matrix}-1\le x\le 2\\0\le y\le 2\end{matrix}\right.\right\}$上服从均匀分布，记

$$U=\begin{cases}1, & 若X\ge 0\\ -1, & 若X<0\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & 若X<Y\\ 1, & 若X\ge Y\end{cases}$$

求（1）（U，V）的联合分布律；

（2）U 与 V 的相关系数.

[解]：(1)　由于 $P(U=-1,V=0)=P(X<0,X<Y)=\dfrac{1}{3}$,

$$P(U=-1,V=1)=P(X<0,X\ge Y)=0$$

$$P(U=1,V=0)=P(X\ge 0,X<Y)=\frac{1}{3}$$

$$P(U=1,V=1)=P(X\ge 0,X\ge Y)=\frac{1}{3}$$

（2）可得到

U	-1	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

V	0	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$E(U)=-1\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3},\quad E(V)=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3},\quad D(U)=E(U^2)-E^2(U)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

$$D(V)=E(V^2)-E^2(V)=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9},\quad E(UV)=1\times 1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3},$$

$$\text{cov}(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$

$$\rho_{uv}=\text{cov}(U,V)\Big/\sqrt{D(U)D(V)}=\frac{2}{9}\Big/\sqrt{\frac{8}{9}\times\frac{2}{9}}=\frac{1}{2}$$

（23）（本题满分 9 分）

设随机变量 X,Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0.6$，且 X 与 Y 的分布列分别为：$P(X=0)=0.5,P(X=1)=0.5$与$P(Y=-1)=0.5,P(Y=1)=0.5$。试求 X与 Y的联合分布列

[解]：由于 X 服从 0－1 分布，故 $EX=0\times0.5+1\times0.5=0.5$， $DX=0.25$ ；而

$EY=-1\times0.5+1\times0.5=0$ ，$EY^2=(-1)^2\times0.5+1\times0.5=1$，$DY=EY^2-(EY)^2=1$。

设 X 与 Y 的联合分布列与边缘分布列为如下：

$X \backslash Y$	-1	1	$P(X=x)$
0	a	b	0.5
1	c	d	0.5
$P(Y=y)$	0.5	0.5	1

则由于

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\frac{EXY-EX\cdot EY}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\frac{EXY}{\frac{1}{2}}=0.6\text{，即 }EXY=0.3\text{；而}$$

$$EXY=0\times(-1)\times a+0\times1\times b+1\times(-1)\times c+1\times1\times d=d-c=0.3$$

又 $d+c=0.5$，从而 $d=0.4, c=0.1$

又因为 $a+c=0.5$，得 $a=0.4$，

$d+b=0.5$，得 $b=0.1$，

从而 X 与 Y 的联合分布列为如下：

$X \backslash Y$	-1	1	$P(X=x)$
0	0.4	0.1	0.5
1	0.1	0.4	0.5
$P(Y=y)$	0.5	0.5	1