数学(一)试题

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 设 $\vec{r}=(x,y,z)^T$，r 为 $\vec{r}$ 的模，则在 $r\neq 0$ 处有 $rot(grad\,\frac{1}{r})=$______。

(2) 设 $f(x)$ 可微，$g(x)$ 为其反函数，则 $\frac{d}{dx}\int_0^{f(x)} g(t)tdt=$______________。

(3) 已知方程 $y''+\alpha_1(x)y'+\alpha_2(x)y=f(x)$　$(f(x)\neq 0)$ 的三个解为 $y_1=\sin x$,

$y_2=x^2+\sin x$, $y_3=e^{2x}+\sin x$，则此方程的一般解为 ________________ 。

(4) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{101}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{100}=$__________。

(5) 在区间（0，1）中随机地取出两个数，则两数之积小于 0.5 的概率为 ________ 。

(6) $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B\mid A)=\frac{1}{4}, P(A\mid B)=\frac{1}{2}$,则$P(A\cup\bar{B})=$_________ 。

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 设 D 是一有界闭域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，在 D 内偏导数存在，且满足等式

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+2\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-f(x,y)$，若 $f(x,y)$ 在 D 的边界上恒为零，则 $f(x,y)$ 在 D 上

（　）。

(A)存在非零的最大值。　　(B)存在非零的最小值。

(C)只在边界上取到最大值和最小值。　　(D)能在边界上取到最大值和最小值。

(8) 设函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数,在点 $M(1,-2)$ 的两个偏导数分别为

$\frac{\partial f(1,-2)}{\partial x}=1, \frac{\partial f(1,-2)}{\partial y}=-1$，则 $f(x,y)$ 在点 $M(1,-2)$ 增加最快的方向是（　）。

(A) $\vec{i}$　　(B) $\vec{j}$　　(C) $\vec{i}+\vec{j}$　　(D) $\vec{i}-\vec{j}$

(9) 设 n 为自然数，当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f(x)>0,\ f''(x)<0$，则成立不等式（　）。

(A)　$f(n)-f(\frac{2n-1}{2})>f(\frac{2n+1}{2})-f(n)$.

(B)　$f(n)-f(\frac{2n-1}{2})<f(\frac{2n+1}{2})-f(n)$.

(C)　$f(\frac{2n+1}{2})-f(\frac{2n-1}{2})>2\left[f(n)-f(\frac{2n-1}{2})\right]$.

(D)　$2\left[f(\frac{2n+1}{2})-f(n)\right]>f(\frac{2n+1}{2})-f(\frac{2n-1}{2})$.

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在区间 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式是 $f(x)=x+x^2$，其

Fourier 级数为 $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，　则（　　　　）。

(A)　$b_3=\frac{2}{3,}, S(\pi)=\pi^2$.　　(B)　$b_3=\frac{4}{3,}, S(\pi)=\pi$.

(C)　$b_3=\frac{2}{3,}, S(\pi)=\pi$.　　(D)　$b_3=-\frac{2}{3,}, S(\pi)=\pi^2$

(11)　设 A 是 3 阶矩阵，已知 A 的行列式 $|A|=-6$，A 的迹 $trA=2$，且满足关系式 $A^2+2A=0$，

则 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值为（　　）。

（A）$-2,3,-6$　　（B）$2,-3,6$

（C）$1,-2,3$　　（D）$-\frac{1}{6},\frac{1}{3},-\frac{1}{2}$

(12) 已知 n 阶矩阵 A,B 满足 $AA^T=E$，$BB^T=E$，其中 E 是 n 阶单位矩阵，则（　）。

（A）$|A+B|=|A|+|B|$ 总成立。

（B）$|A+B|=|A|+|B|$　总不成立。

（C）仅当 $|A||B|<0$ 时，$|A+B|=|A|+|B|$ 成立。

（D）仅当 $|A||B|>0$ 时，$|A+B|=|A|+|B|$ 成立。

(13) 设 $P(A)>0$，$P(B)>0$，且 A 与 B 二事件互斥，下列关系式正确的是（　　　）。

(A) $P(B)=P(B|A)$　　(B) $P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})$

(C) $P(A|\bar{B})=\dfrac{P(A)}{1-P(B)}$　　(D) $P(B)=1-P(A)$

(14) 设总体 $X\sim N(\mu,0.5^2)$，$X_1\ \cdots\ X_n$ 为简单随机样本，要使 μ 的 95%的置信区间长度不超过 0.6，至少要取样本容量 n 为（　　）。

(A) 10　　(B) 11　　(C) 8　　(D) 3

三、 解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

(15)（本题满分 11 分）

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=4$ 点处条件收敛，判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ 是否收敛，若收敛，说明是条件收敛，还是绝对收敛？

(16)（本题满分 12 分）

设 $D_t=\{(x,y)\in R^2\,\big|\,x^2+y^2\le t^2,t>0\}$，$\boldsymbol{f(x,y)}$ 在 D_t 上连续，在 D_t 内可微 $f(0,0)=1$，D_t 的正向边界为 C_t。若 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在 D_t 上满足方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=kf(x,y)$, 试对曲线 C_t 的外法矢量 $\vec{n_0}(t)$，求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t^2}\oint_{C_t}\dfrac{\partial f}{\partial n_0}dl$。

(17)（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 是正值连续函数，D 为圆心在原点的单位圆，∂D 为 D 的正向边界，

证明：(1) $\int_{\partial D}xf(y)dy-\dfrac{y}{f(x)}dx=\int_{\partial D}-yf(x)dx+\dfrac{x}{f(y)}dy$；

(2) $\int_{\partial D}xf(y)dy-\dfrac{y}{f(x)}dx\ge 2\pi$。

(18)（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 由二阶连续导数,并满足方程 $f(x)=\int_0^x f(1-t)dt+1$,求 $f(x)$.

(19)（本题满分 12 分）

设 $x=\phi(t,\lambda)$ 是微分方程定解问题 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+\lambda x=1\\ x|_{t=0}=0\end{cases}$ 的解，$\lambda\in R$ 为参数。

(1)写出解 $\phi(t,\lambda)$ 的表达式;

(2) 证明 $\phi(t,\lambda)$ 在 $t-\lambda$ 全平面连续且可微。

(20)（本题满分 11 分）

在 R^3 中，设平面 π 的方程是 $x+y+z=0$，点 P 的坐标向量是 $\alpha=(a,b,c)^T$，设 A 是 3 阶矩阵，令 $A\alpha$ 是 Q 点的坐标向量，

(1) 求矩阵 A，使得 P 点和 Q 点关于平面 π 对称；

(2) 设平面 π_1 的方程是 $x-y+z=1$，求平面 π_2 的方程，使得 π_1 与 π_2 关于平面 π 对称.

(21)（本题满分 10 分）

设 A 是 n 阶实对称矩阵，满足条件：

(1) 全部元素不为 0　　(2) 每行元素之和为 0　　(3) $r(A)=1$

证明：

(1) $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}0&&&&\\&0&&&\\&&\cdots&&\\&&&0&\\&&&&k\end{pmatrix}$，其中 k 为常数且 $k=trA$

(2) 求 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$

(22)（本题满分 9 分）

在计算机上作大型科学计算，需对十进制的 x_j 的小数点后第 6 位作四舍五入，得到 x_j 的近似数 y_j，则误差 $\varepsilon_j=x_j-y_j$ 在区间 $(-0.5\times10^{-5}，0.5\times10^{-5})$ 内随机取值．视 ε_j 为从区间内的均匀分布随机变量，令累积误差 $\eta_n=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j$，试利用中心极限定理，当 n =10000 时有 99.7%以上的把握给出 $|\eta_n|$ 的近似估计(估计上界).

注 $2\Phi(3)-1=0.9974$.

(23)（本题满分 9 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & x\ge\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$ $(\theta>0$未知$)$ $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，试求参数 θ 的最大似然估计量，并讨论是否为无偏估计量.