清华大学数学系教授　刘坤林 俞正光 谭泽光 葛余博

数学(二)试题

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) $\int \dfrac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=$______________ 。

(2) 广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}dx=$_______。

(3) 二重积分$\int_0^3 dx\int_{-x}^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2},2xy)dy$在极坐标系下先对$\rho$,而后对$\varphi$的累次积分表达式为 __________。

(4) 设 $f(x)=\int_0^{x^2} e^t(\int_0^t udu)dt$，则 $f''(x)=$_________.

(5) 当矩阵 $A=$_______ ，$B=$________ 时，有 $A\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&3&3\end{pmatrix}$成立。

(6) 已知 $X_1=(a,\ 1,\ 1)^T$，$X_2=(-1,\ -1,\ 2)^T$，$X_3=(2,\ b,\ 0)^T$ 是 3 阶实对称矩阵 3 个不同特征值对应的特征向量，则 $a=$ ________ ，$b=$ __________。

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 设 $t>0$，则当t趋于零时，函数 $f(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}\left[1-\cos\left(x^2+y^2\right)\right]d\sigma$ 是t的n阶无穷小量，则$n=$（　　　）。

(A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8

(8) 设$g(x)$有二阶连续导数，且$g(0)=1$，$g'(0)=-1$，若函数 $f(x)=\begin{cases}g(x)-e^{-x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则（　　）。

(A) $f(x)$在$x=0$处连续，但不可导。

(B) $f'(0)$存在，但$f'(x)$在$x=0$处不连续。

（C）　$f'(0)$存在，且$f'(x)$在$x=0$处连续。

（D）　$f(x)$在$x=0$处不连续。

(9) 设$f'(0)$存在，$\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{1-\cos f(x)}{\sin x})^{\frac{1}{x}}=e$，则$f'(0)=$（　　）。

（A）0　　（B）1　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）$\sqrt{e}$

(10) 设函数$y_1(x), y_2(x)$是微分方程$y'+p(x)y=0$的两个不同特解，则该方程的通解为（　　）。

（A）$y=C_1y_1+C_2y_2$。　　（B）$y=y_1+Cy_2$。

（C）$y=y_1+C(y_1+y_2)$。　　（D）$y=C(y_2-y_1)$。

(11) 若一直线与两曲线$y=x^3+3$和$y=x^3-1$都相切，则两个切点分别为（　　）。

（A）$(-1,2)$和$(1,-2)$。　　（B）$(1,4)$和$(-1,-2)$。

（C）$(-1,2)$和$(-1,-2)$。　　（D）$(-1,2)$和$(1,4)$。

(12) 已知函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某个邻域内连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则（　　）。

（A）点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点。

（B）点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点。

（C）点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点。

（D）根据所给条件无法判断点$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点。

(13) 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，且$\alpha_4$不能被$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性表出，则以下结论正确的是（　　）

（A）α_1，α_2，α_3 必线性无关　　（B）α_1，α_2，α_3 必线性相关

(C) α_1，α_2, α_4 必线性无关　　　(D) α_1，α_2, α_4 必线性相关

(14) 已知$\beta_1=(1\ \ 0\ \ 0\ \ a_1)^T$，$\beta_2=(1\ \ 2\ \ 0\ \ a_2)^T$，$\beta_3=(1\ \ 2\ \ 3\ \ a_3)^T$，$\beta_4=(1\ \ 0\ \ 3\ \ a_4)^T$，

对于任意的实数$a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4$，有________成立。

(A) $\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3$ 必线性相关；　　　(B) $\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3$ 必线性相无关；

(C) $\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3\ \ \beta_4$ 必线性相关；　(D) $\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3\ \ \beta_4$ 必线性相无关；

三、　解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

(15)（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 满足 $f''(x)+[f'(x)]^2=2x$，讨论 $x=0$ 是否为 $y=f(x)$ 的极值点。

(16)（本题满分 10 分）

计算不定积分 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}}$。

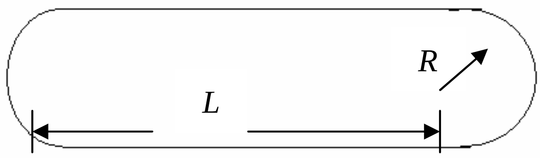
(17)（本题满分 12 分）

若函数 $y=f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且满足条件：

$$f''(x)+x^2(f'(x))^3-2f(x)=0 \text{ 及 } f(0)=f(1)=0 .$$

证明：函数 $y=f(x)$在$[0,1]$上恒为零。

(18)（本题满分 12 分）



水平放置的储油罐的罐体如图，中间圆柱体部分长为 L（单位米），半径为 R（单位米），两端为半球，半径也为 R。

(1) 若以每小时 Q（单位立方米）的恒定流量从油罐的顶部输入燃油，求：当油罐内燃油容量达到总容量一半时，液面的上升速度。

(2) 若油罐平置于地面，油的密度为 ρ（kg/m^3），问要装满这一罐油需要作多少功？

(19)（本题满分 10 分）

计算累次积分 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$。

(20)（本题满分 10 分）

求解二阶微分方程的定解问题 $\begin{cases}\cos y\dfrac{d^2y}{dx^2}+\sin y(\dfrac{dy}{dx})^2=\dfrac{dy}{dx}\\ y(-1)=\dfrac{\pi}{6},\ y'(-1)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$。

(21)（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内连续可导，且满足 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot f(x)\,dx=0$，证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(\xi)=2f(\xi)\tan\xi$.

(2) 存在 $\eta\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(\eta)=f(\eta)\tan\eta$.

(22)（本题满分 9 分）

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}a & -1 & c\\ 5 & b & 3\\ 1-c & 0 & -a\end{bmatrix}$，其行列式 $|A|=-1$，又 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^T$，求 a，b，c，λ_0 的值。

(23)（本题满分 9 分）

设 $A=\begin{bmatrix}8 & -2 & -2\\ -2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{bmatrix}$，求实对称阵 B，使 $A=B^2$。