水木艾迪考研辅导班　 教学与命题研究中心

清华大学数学系教授　刘坤林 俞正光 谭泽光 葛余博

数学(三)试题

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}=$__________ 。

(2) 已知 $f'(x)=\dfrac{\cos x}{x},\ f(\dfrac{\pi}{2})=a,\ f(\dfrac{3\pi}{2})=b$,则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=$__________ 。

(3) 设任意常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在定义域内的零点个数为_____。

(4) A 是三阶可逆矩阵，且 A^{-1} 的特征值为 1，2，3，则 A^* 的特征值为 _______。

(5) 设随机变量 X 服从均值为 $\dfrac{1000}{\lambda}$ $(\lambda>0)$ 的指数分布，且其上 25%分位点为 $\dfrac{1000}{3}$，则 $\lambda=$______ 。

(6) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,3^2)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组样本，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，已求得假设 " 总体的均值等于 75 " 的拒绝域为 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n:\bar{x}<74.02$ 或 $\bar{x}>75.98\}$，则样本容量 $n=$_______ 。

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 若 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的二阶可导的奇函数，在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$，且 $f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内必有（　　）。

(A) $f'(x)>0,$ 且存在常数 $k>0$ 使得 $y=f(x)$ 与 $y=kx$ 有两个交点；

(B) $f'(x)>0,$ 且存在常数 $k>0$ 使得 $y=f(x)$ 与 $y=kx$ 有唯一交点；

(C) $f'(x)>0,\ \ f''(x)<0$ ；

(D) $f'(x)<0,\ \ f''(x)>0$ 。

(8) 设$\phi(x)$连续，$f_0(x)=1$，$f_1(x)=\int_0^x f_0(t)\varphi(t)dt$ 且 $f_1(0)=0$，

$f_k(x)=\int_0^x f_{k-1}(t)\varphi(t)dt$，$(k=1，2，3,\cdots)$，则由已知函数 $f_1(x)$ 表出的 $f_k(x)=$ (　　)．

(A) $\dfrac{1}{(k+1)!}f_1^k(x)$．　(B) $\dfrac{1}{k!}f_1^k(t)$．　(C) $\dfrac{1}{k!}f_1^k(x)$．　(D) $\dfrac{1}{k!}f_1^{k-1}(x)$．

(9) 若$\mathrm{I}_1=\iint\limits_D(x+y)^2d\sigma$，$\mathrm{I}_2=\iint\limits_D(x-y)^2d\sigma$，$D:0\le y\le\sqrt{r^2-x^2}$，则（　　）。

(A) $\mathrm{I}_1=\mathrm{I}_2$；　　(B) $\mathrm{I}_1>\mathrm{I}_2$；

(C) $\mathrm{I}_1<\mathrm{I}_2$；　　(D) I_1与 I_2之大小相等关系不定而与r有关．

(10) 若二元函数$f(x,y)$和$g(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$点某邻域内有定义；$f(x,y)$在P_0点可微且$f(x_0,y_0)=0$、$g(x,y)$在P_0点连续但不可微。则在下列四个函数:

$$F_1(x,y)=f(x,y)\cdot|f(x,y)|,\quad F_2(x,y)=f(x,y)\cdot g(x,y),$$
$$F_3(x,y)=f(x,y)\cdot|g(x,y)|,\quad F_4(x,y)=g(x,y)\cdot|f(x,y)|$$

(　　)。

(A) 只有F_1在P_0点可微;　　(B) 只有F_1，F_2在P_0点可微;

(C) 只有F_1，F_2，F_3在P_0点可微;　　(D) 全在P_0点可微。

(11) 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+2)}(x-a)^n$ 在点$x_1=-2$条件收敛，则幂级数

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)^2}(x-a)^n$　在点$x_1=\dfrac{1}{2}$的收敛情况是(　　　　)

(A) 绝对收敛；　(B) 条件收敛；　(C) 发散；　(D) 不能确定。

(12) A,B为n阶方阵，$r(A)=r(B)$，则（　　）。

(A) $r(A-B)=0$。　　(B) $r(A+B)=2r(A)$。

(C) $r(AB)=2r(A)$。　　(D) $r(AB)\le r(A)+r(B)$。

(13) 设$\xi_1=(1\ \ 0\ \ 2)^T$，$\xi_2=(0\ \ 1\ \ -1)^T$是齐次方程组$AX=0$的解，则$A=$_____ 。

(A) $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

(14) 已知 X_1, X_2, X_3 独立且服从 $N(0,\sigma^2)$，Z=$\sqrt{\dfrac{2}{3}}\dfrac{X_1+X_2+X_3}{|X_3-X_2|}$，则（　　）。

(A) $Z \sim N(0,\sigma^2)$　(B) $Z \sim \chi^2(3)$　(C) $Z \sim t(2)$　(D) $Z \sim t(1)$

三、　解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

(15)（本题满分 10 分）

设 $u = xf(x,\dfrac{y}{x})$，其中 $f(x,y)$ 有连续的二阶偏导数。求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$。

(16)（本题满分 11 分）

设 $f(x)$ 为单调函数,且二阶可导,$g(x)$ 为其反函数，已知

$$f(1)=2,\ f'(1)=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ f''(1)=1。$$

求：(1)　$g''(2)$;　　(2)　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{2x}$.

(17)（本题满分 10 分）

设 a_0 为实数，a_1，a_2，$\cdots$，a_n 为正数，且满足 $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$，

试证明：多项式函数 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ 在 $(0,1)$ 内恰有一个实根.

(18)（本题满分 11 分）

某银行推出贷款购房业务，设贷款 A 元的月利为 r 元，n 个月本息还清。在这 n 个月内按复利计息，每月连本带息归还 x 元。

(1)　试求出 $x = f(A,r,n)$ 的函数关系；

(2)　记 n 个月的平均利息为 $v=\dfrac{xn-A}{n}$，试计算 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{v}{r}=?$

(19)（本题满分 12 分）

设 $D=\{(x,y)\in R^2\big|\,|x|\le a,\ |y|\le b,a>0,b>0\}$， $f(x,y)$ 在 D 上连续，在 D 内可微，且满足方程 $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}=kf(x,y),(\text{常数}k\ne 0)$，若在 D 的边界上 $f(x,y)=0$，试证 $f(x,y)$ 在 D 上恒为零。

(20)（本题满分 10 分）

设 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性无关，且与非零向量 β_1,β_2 都正交，证明：

(1) β_1,β_2 线性相关；

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\beta_1$ 线性无关。

(21)（本题满分 11 分）

设 $A\in M_{m,n}$，记 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$，如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{n-1}$ 线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\cdots\alpha_n$ 线性无关，又 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，

证明：(1) 线性方程组 $AX=\beta$ 必有无穷多解，

(2) 记 $X=\left(x_1,x_2,\cdots x_n\right)^T$ 为线性方程组 $AX=\beta$ 的任一解，则必有 $x_n=1$。

(22)（本题满分 10 分）

设有白球与黑球各 4 只，从中任取 4 只放入甲盒，余下的 4 只放入乙盒，然后分别从 2 盒中各任取一个，颜色正好相同，问放入甲盒的 4 只球中有几个白球的概率最大？

(23)（本题满分 9 分）

设随机变量 U，V，使得方程 $t^2+Ut+V=0$ 的两个根 X，Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2xe^{-x(y+1)} & x\ge 0,\ 0\le y\le 1\\ 0 & x<0\ \ or\ \ y<0\ \ or\ \ y>1\end{cases}$$，求系数 V 的概率密度函数。