水木艾迪考研辅导班　教学与命题研究中心
清华大学数学系教授　刘坤林 俞正光 谭泽光 葛余博

数学(一)试题答案及解题分析

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

（1）设 $\vec{r}=(x,y,z)^T$，r 为 $\vec{r}$ 的模，则在 $r\neq 0$ 处有 $rot(grad\frac{1}{r})=$______。

答案为：0。

（2）设 $f(x)$ 可微，$g(x)$ 为其反函数，则 $\frac{d}{dx}\int_0^{f(x)} g(t)tdt=$____________。

答案为：$xf(x)f'(x)$。

（3）已知方程 $y''+\alpha_1(x)y'+\alpha_2(x)y=f(x)\quad \left(f(x)\neq 0\right)$ 的三个解为 $y_1=\sin x$, $y_2=x^2+\sin x$, $y_3=e^{2x}+\sin x$，则此方程的一般解为 ______________ 。

答案为：$y=c_1x^2+c_2e^{2x}+\sin x$，（注意答案可有不同形式）。

（4）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{101}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{100}=$_________。

答案为：$\begin{pmatrix}1&102&1\\0&101&1\\0&99&1\end{pmatrix}$。

（5）在区间（0，1）中随机地取出两个数，则两数之积小于 0.5 的概率为 _______ 。

答案为：$\frac{1}{2}(1+\ln 2)$。

（6）$P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B\mid A)=\frac{1}{4}, P(A\mid B)=\frac{1}{2}$, 则 $P(A\cup\bar{B})=$________ 。

答案为：$\frac{11}{12}$。

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

（7）设 D 是一有界闭域，函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续，在 D 内偏导数存在，且满足等式

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+2\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-f(x,y)$，若 $f(x, y)$ 在 D 的边界上恒为零，则 $f(x, y)$ 在 D 上（　）。

(A)存在非零的最大值。　　(B)存在非零的最小值。

(C)只在边界上取到最大值和最小值。　　(D)能在边界上取到最大值和最小值。

答案为：D

（8）设函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数,在点 $M(1,-2)$ 的两个偏导数分别为

$\frac{\partial f(1,-2)}{\partial x}=1,\frac{\partial f(1,-2)}{\partial y}=-1$，则 $f(x,y)$ 在点 $M(1,-2)$ 增加最快的方向是（　）。

(A) $\vec{i}$　　(B) $\vec{j}$　　(C) $\vec{i}+\vec{j}$　　(D) $\vec{i}-\vec{j}$

答案为：D

（9）设 n 为自然数，当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f(x)>0,\ f''(x)<0$，则成立不等式（　）。

(A)　$f(n)-f(\frac{2n-1}{2})>f(\frac{2n+1}{2})-f(n)$.

(B)　$f(n)-f(\frac{2n-1}{2})<f(\frac{2n+1}{2})-f(n)$.

(C)　$f(\frac{2n+1}{2})-f(\frac{2n-1}{2})>2\left[f(n)-f(\frac{2n-1}{2})\right]$.

(D)　$2\left[f(\frac{2n+1}{2})-f(n)\right]>f(\frac{2n+1}{2})-f(\frac{2n-1}{2})$.

[证]：首先 $f(n)-f(\frac{2n-1}{2})=\frac{1}{2}f'(\xi_1)$，$(\frac{2n-1}{2}<\xi_1<n)$，

$$f(\frac{2n+1}{2})-f(n)=\frac{1}{2}f'(\xi_2),\ (n<\xi_2<\frac{2n+1}{2})$$，

于是$\xi_1<\xi_2$，又因为$f''(x)<0$，故$f'(x)$单调减少，　所以

$$f(n)-f(\frac{2n-1}{2}) > f(\frac{2n+1}{2})-f(n)。$$

答案为：A

（10）设$f(x)$是周期为2π的周期函数，它在区间$(-\pi,\pi]$上的表达式是$f(x)=x+x^2$，其Fourier级数为$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，　则（　　　　）。

(A)　$b_3=\frac{2}{3},\ S(\pi)=\pi^2$.　　(B)　$b_3=\frac{4}{3},\ S(\pi)=\pi$.

(C)　$b_3=\frac{2}{3},\ S(\pi)=\pi$.　　(D)　$b_3=-\frac{2}{3},\ S(\pi)=\pi^2$

答案为：A

（11）　设A是3阶矩阵，已知A的行列式$|A|=-6$，A的迹$trA=2$，且满足关系式$A^2+2A=0$，则A的伴随矩阵A^*的特征值为（　　）。

（A）$-2,3,-6$　　（B）$2,-3,6$

（C）$1,-2,3$　　（D）$-\frac{1}{6},\frac{1}{3},-\frac{1}{2}$

答案为：A

（12）已知n阶矩阵A,B满足$AA^T=E$，$BB^T=E$，其中E是n阶单位矩阵，则（　）。

（A）$|A+B|=|A|+|B|$总成立。

（B）$|A+B|=|A|+|B|$　总不成立。

（C）仅当$|A||B|<0$时，$|A+B|=|A|+|B|$成立。

（D）仅当$|A||B|>0$时，$|A+B|=|A|+|B|$成立。

答案为：C

（13）设$P(A)>0$，$P(B)>0$，且A与B二事件互斥，下列关系式正确的是（　　）。

（A）$P(B)=P(B|A)$　　（B）$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$

（C）$P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A)}{1-P(B)}$　　（D）$P(B)=1-P(A)$

答案为：C

（14）设总体$X\sim N(\mu,0.5^2)$，$X_1\quad\cdots\quad X_n$为简单随机样本，要使μ的95%的置信区间长度不超过0.6，至少要取样本容量n为（　　）。

（A）10　　（B）11　　（C）8　　（D）3

答案为：B

三、　解答题(本题9小题，满分94分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

（15）（本题满分11分）

设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=4$点处条件收敛，判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(1+\frac{1}{n})^{n^2}$是否收敛，若收敛，说明是条件收敛，还是绝对收敛？

[解]：由幂级数的收敛性质，条件收敛点$x=3$只能处于收敛区间的端点，而该级数收敛区间的中点为$x=1$，由此得知其收敛半径$R=2$。

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^n=e$，又序列$(1+\frac{1}{n})^n$单调增加，因此$(1+\frac{1}{n})^{n^2}<e^n$。于是得到

$$\left|a_n(1+\frac{1}{2n})^{n^2}\right|<|a_n|\cdot e^n,$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^n$是相应于$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=e+1$处的数项级数，且$x=e+1\in(-2,4)$，

所以$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^n$绝对收敛。

由正项级数的比较准则，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ 绝对收敛。

(16)（本题满分 12 分）

设 $D_t=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\le t^2, t>0\}$，$\boldsymbol{f(x,y)}$ 在 D_t 上连续，在 D_t 内可微 $f(0,0)=1$，D_t 的正向边界为 C_t。若 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在 D_t 上满足方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=kf(x,y)$, 试对曲线 C_t 的外法矢量 $\vec{n_0}(t)$，求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\oint_{C_t}\frac{\partial f}{\partial n_0}dl$。

[解]：$\frac{\partial f}{\partial n_0(t)}dl=(f_x\cos\alpha+f_y\cos\beta)dl$

由于正向为逆时针方向，因此 $dl\cos\alpha=dy,\ dl\cos\beta=-dx,$

$$\oint_{C_t}\frac{\partial f}{\partial n_0}dl=\oint_{C_t} f_x dy-f_y dx=\iint_{D_t}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})d\sigma_{xy},$$
$$=\iint_{D_t} kf(x,y)dxdy=kf(\xi,\eta).\pi t^2$$

其中 $(\xi,\eta)\in D_t$。

于是 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\oint_{C_t}\frac{\partial f}{\partial n_0}dl=f(0,0)k\pi=k\pi$。

(17)（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 是正值连续函数，D 为圆心在原点的单位圆，∂D 为 D 的正向边界，

证明：(1) $\int_{\partial D} xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\int_{\partial D}-yf(x)dx+\frac{x}{f(y)}dy$；

(2) $\int_{\partial D} xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\ge 2\pi$。

[证明]：(1) 左端$=\iint_D (f(y)+\dfrac{1}{f(x)})dxdx$，右端$=\iint_D (f(x)+\dfrac{1}{f(y)})dxdx$，

由对称性，左端=右端。

(2) $\int\limits_{\partial D} xf(y)dy-\dfrac{y}{f(x)}dx=\iint_D (f(y)+\dfrac{1}{f(x)})dxdx$，再次由对称性，

$$\iint_D f(y)dxdx=\iint_D f(x)dxdy,$$

因此$\iint_D (f(y)+\dfrac{1}{f(x)})dxdx=\iint_D (f(x)+\dfrac{1}{f(x)})dxdx$，

因为 $f(x)$ 是正值连续函数，由估值定理得到

$$\iint_D (f(x)+\frac{1}{f(x)})dxdx\ge 2\iint_D dxdy=2\pi$$，即原等式成立。

(18)（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 由二阶连续导数,并满足方程 $f(x)=\int_0^x f(1-t)dt+1$,求 $f(x)$.

[解]：方程两端求导得到　　$f'(x)=f(1-x)$　　(1)

再求导数得到　　$f''(x)=-f'(1-x)$　　(2)

由(1)式推出　　$f'(1-x)=f(1-(1-x))=f(x)$

代入(2)式得到　　$f''(x)=-f(x)$

显然 $f(0)=1$.又在(1)式中令 $x=0$,得到 $f'(0)=f(1)$,于是原积分方程化为二阶微分方程的初值问题: $\begin{cases} f''(x)+f(x)=0 \\ f(0)=1, f'(0)=f(1) \end{cases}$

方程通解为　$f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$

由 $f(0)=1$ 可以得到 $c_1=1$. 两端求导得到　$f'(x)=-\sin x+c_2\cos x$

再由 $f'(0)=f(1)$ 可以得到　$c_2=\dfrac{\cos 1}{1-\sin 1}$

于是　$f(x)=\cos x+\dfrac{\cos 1}{1-\sin 1}\sin x$

（19）（本题满分 12 分）

设 $x=\phi(t,\lambda)$ 是微分方程定解问题 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+\lambda x=1\\ x|_{t=0}=0\end{cases}$ 的解，$\lambda\in R$ 为参数。

(1) 写出解 $\phi(t,\lambda)$ 的表达式；

(2) 证明 $\phi(t,\lambda)$ 在 $t-\lambda$ 全平面连续且可微。

[解]: $\lambda\neq 0$ 时：$x=\phi(t,\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}(c-e^{-\lambda t})$，　由 $\phi(0,\lambda)=0$ ，$c=1$

$\lambda=0$ 时：$x=\phi(t,\lambda)=t$，因此得到

$$\phi(t,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t}) & \lambda\neq 0\\ t & \lambda=0\end{cases}$$

只需讨论关于 λ 的连续性与可微性。

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})=t=\varphi(t,0)$ ，因此 $\varphi(t,\lambda)$ 连续。$\lambda\neq 0$ 时，

$$\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}=-\frac{1}{\lambda^2}(1-e^{-\lambda t})+\frac{te^{-\lambda t}}{\lambda}$$

$\lambda=0$ 时，$\dfrac{\partial\phi(t,0)}{\partial\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})-t}{\lambda}=-\dfrac{t^2}{2}$

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\left(-\frac{1}{\lambda^2}(1-e^{-\lambda t})+\frac{te^{-\lambda t}}{\lambda}\right)=-\frac{t^2}{2}=\frac{\partial\phi(t,0)}{\partial\lambda}$$

偏导数连续，所以可微。

（20）（本题满分 11 分）

在 R^3 中，设平面 π 的方程是 $x+y+z=0$，点 P 的坐标向量是 $\alpha=(a,b,c)^T$，设 A 是 3 阶矩阵，令 $A\alpha$ 是 Q 点的坐标向量，

（1）求矩阵 A，使得 P 点和 Q 点关于平面 π 对称；

（2）设平面π_1的方程是$x-y+z=1$，求平面π_2的方程，使得π_1与π_2关于平面π对称.

[解]：（1）平面π的法向量$\vec{n}=(1,\quad 1,\quad 1,)^T$，过点$P$与$\pi$垂直的直线方程为

$$\frac{x-a}{1}=\frac{y-b}{1}=\frac{z-c}{1}$$

该直线与平面π的交点为$\left(\frac{2a-b-c}{3},\quad \frac{-a+2b-c}{3},\quad \frac{-a-b+2c}{3}\right)$，

Q点的坐标为$\left(\frac{a-2b-2c}{3},\quad \frac{-2a+b-2c}{3},\quad \frac{-2a-2b+c}{3}\right)$

所以所求矩阵$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$。

（2）在π_1上取一个点$\beta=(1,\quad 1,\quad 1)^T$，法向量$\vec{n}_1=(1,\quad -1,\quad 1)^T$，

则　$A\beta=(-1,\quad -1,\quad -1)^T$，　$A\vec{n}_1=\left(\frac{1}{3},\quad \frac{5}{3},\quad \frac{1}{3}\right)^T$

于是所求平面方程为$x+5y+z+7=0$。

(21)（本题满分 10 分）

设A是n阶实对称矩阵，满足条件：

（1）全部元素不为 0　　（2）每行元素之和为 0　　（3）$r(A)=1$

证明：

（1）$A\sim\Lambda=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \cdots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & k \end{pmatrix}$，其中$k$为常数且$k=trA$

（2）求P，使$P^{-1}AP=\Lambda$

[证]：A实对称，故

$$A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

而 $r(A) = 1$. $|A| = 0$. $\lambda = 0$为A的特征值.

$r(A) = 1$. $AX = 0$ 对应 $n-1$ 个无关的解向量

故 0 的代数重数 $n_0 \geq n-1$ 而 $r(A) = 1$, $trA = K$

故 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$. $\lambda_n = trA = K$,

故 A 具有 n 个线性无关的特征向量，$A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & K \end{pmatrix}$.

当 $\lambda = 0$, 求特征向量 即解 $AX = 0$. 因 $r(A) = 1$

$$A \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} -a_{12} \\ a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -a_{13} \\ 0 \\ a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \quad X_{n-1} = \begin{pmatrix} -a_{1n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{11} \end{pmatrix}$$

而 $\lambda_n = K$ 时对应的特征向量与 $X_1, \cdots, X_{n-1}$ 均正交.

故
$$X_n = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}$$

故 $P=(X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}\ X_n)$，即 $P^TAP=\begin{pmatrix}0&&&\\&\ddots&&\\&&0&\\&&&K\end{pmatrix}$。

(22)（本题满分 9 分）

在计算机上作大型科学计算，需对十进制的 x_j 的小数点后第 6 位作四舍五入，得到 x_j 的近似数 y_j，则误差 $\varepsilon_j=x_j-y_j$ 在区间 $(-0.5\times10^{-5}, 0.5\times10^{-5})$ 内随机取值．视 ε_j 为从区间内的均匀分布随机变量，令累积误差 $\eta_n=\sum_{j=1}^n\varepsilon_j$，试利用中心极限定理，当 n =10000 时有 99.7%以上的把握给出 $|\eta_n|$ 的近似估计(估计上界)．

注 $2\Phi(3)-1=0.9974$.

[解]：ε_j, j=1,2, …, 是独立同分布的随机变量，$\varepsilon_j\sim U_{(-0.5\times10^{-5},\ 0.5\times10^{-5})}$.

故 $E\varepsilon_j=0$，$\sigma^2=D\varepsilon_j=E\varepsilon_j^2=(0.5\times10^{-5})^2/3$．由中心极限定理(林德伯格-勒维定理)

$$P(|\eta_n/\sqrt{n}\sigma|<k)=P(|\sum_{j=1}^n\varepsilon_j|<k\sqrt{n}\sigma)\approx2\Phi(k)-1.$$

取 $k=3$，则此概率近似为 0.9974，故有 99.7%以上的把握断言

$$|\eta_n|=|\sum_{j=1}^n\varepsilon_j|\le3\times\sqrt{n}\times0.5\times10^{-5}/\sqrt{3}.$$

当 $n=10{,}000$ 时，$|\eta_n|=|\sum_{j=1}^n\varepsilon_j|\le\sqrt{3}\times0.5\times10^{-3}\approx0.8660\times10^{-3}\approx0.00087$.

(23)（本题满分 9 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & x\ge\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$ $(\theta>0$未知$)$ $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，试求参数 θ 的最大似然估计量，并讨论是否为无偏估计量．

[解]：取一组样本值 $x_1,x_2\cdots,x_n$，均大于等于 θ，于是有

$$\text{似然函数}L(\theta)=\prod_{i=1}^n e^{-(x_i-\theta)}=e^{-\sum_{i=1}^n x_i+n\theta}$$

$$\ln L(\theta)=-\sum_{i=1}^n x_i+n\theta$$

显然，当 θ 取最大时，$\ln L$ 为最大，即 $L(\theta)$ 为最大，故 θ 的最大似然估计为

$\hat\theta=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，最大似然估计量为 $\hat\theta=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$。

由于 $F(x)=\int_\theta^x e^{-(t-\theta)}dt=1-e^{-(x-\theta)}, x\ge\theta,\quad F(x)=0, x<\theta$，

所以 $F_{\hat{\theta}}(z)=1-[1-F(z)]^n=1-e^{-n(z-\theta)}, z\ge\theta,\quad F_{\hat{\theta}}(z)=0, z<\theta$，

因此 $F_{\hat{\theta}}(z)=F'_{\hat{\theta}}(z)=ne^{-n(z-\theta)}, z\ge\theta,\quad F_{\hat{\theta}}(z)=0, z<\theta$，

$E(\hat{\theta})=\int_{\theta}^{+\infty} z\cdot ne^{-n(z-\theta)}dz=\theta+\frac{1}{n}\neq\theta$，所以 $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计量.。