清华大学数学系教授　刘坤林　俞正光　谭泽光　葛余博

数学(二)试题答案及解题分析

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) $\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}} =$ ______ 。

答案为：$\arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$。

(2) 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx =$ ______。

答案为：1。

(3) 二重积分 $\int_0^3 dx\int_{-x}^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2},2xy)dy$ 在极坐标系下先对 ρ ,而后对 φ 的累次积分表达式为 ______。

答案为：$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi\int_0^{\frac{3}{\cos\varphi}} f(\rho,\rho^2\sin 2\varphi)\rho d\rho$。

(4) 设 $f(x)=\int_0^{x^2} e^t(\int_0^t udu)dt$，则 $f''(x)=$ ______.

答案为：$f''(x)=\left(5x^4+2x^6\right)e^{x^2}$。

(5) 当矩阵 $A=$ ______ ，$B=$ ______ 时，有 $A\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&3&3\end{pmatrix}$成立。

答案为：利用初等变换，$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$。

(6) 已知 $X_1=(a,\ 1,\ 1)^T$，$X_2=(-1,\ -1,\ 2)^T$，$X_3=(2,\ b,\ 0)^T$ 是 3 阶实对称矩阵 3 个不同特征值对应的特征向量，则 $a=$ ______ ，$b=$ ______。

答案为：$a=1,b=-2$。

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

（7）设 $t>0$，则当 t 趋于零时，函数 $f(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}\left[1-\cos\left(x^2+y^2\right)\right]d\sigma$ 是 t 的 n 阶无穷小量，则 $n=$（　　）。

（A）2　　（B）4　　（C）6　　（D）8

答案为：C

（8）设 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1$，$g'(0)=-1$，若函数 $f(x)=\begin{cases} g(x)-e^{-x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，则（　　）。

（A）$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但不可导。

（B）$f'(0)$ 存在，但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续。

（C）$f'(0)$ 存在，且 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

（D）$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续。

答案为：C

（9）设 $f'(0)$ 存在，$\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{1-\cos f(x)}{\sin x})^{\frac{1}{x}}=e$，则 $f'(0)=$（　　）。

（A）0　　（B）1　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）$\sqrt{e}$

答案为：C

（10）设函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的两个不同特解，则该方程的通解为（　　）。

（A）$y=C_1y_1+C_2y_2$。　　（B）$y=y_1+Cy_2$。

（C）$y=y_1+C(y_1+y_2)$。　　（D）$y=C(y_2-y_1)$ 。

答案为：D

（11）若一直线与两曲线 $y=x^3+3$ 和 $y=x^3-1$ 都相切，则两个切点分别为（　　）。

(A) $(-1,2)$ 和 $(1,-2)$。　　(B) $(1,4)$ 和 $(-1,-2)$。

(C) $(-1,2)$ 和 $(-1,-2)$。　　(D) $(-1,2)$ 和 $(1,4)$。

答案为：B

（12） 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则（　　）。

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点。

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点。

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点。

(D) 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点。

答案为：A

（13）已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，且 α_4 不能被 α_1，α_2，α_3 线性表出，则以下结论正确的是（　　）

(A) α_1，α_2，α_3 必线性无关　　(B) α_1，α_2，α_3 必线性相关

(C) α_1，α_2，α_4 必线性无关　　(D) α_1，α_2，α_4 必线性相关

答案为：B

（14） 已知 $\beta_1=(1\ \ 0\ \ 0\ \ a_1)^T$，$\beta_2=(1\ \ 2\ \ 0\ \ a_2)^T$，$\beta_3=(1\ \ 2\ \ 3\ \ a_3)^T$，$\beta_4=(1\ \ 0\ \ 3\ \ a_4)^T$，

对于任意的实数 a_1　a_2　a_3　a_4，有________成立。

(A) β_1　β_2　β_3 必线性相关；　　(B) β_1　β_2　β_3 必线性相无关；

(C) β_1　β_2　β_3　β_4 必线性相关；　　(D) β_1　β_2　β_3　β_4 必线性相无关；

答案为：B

三、 解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

(15)（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 满足 $f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=2x$,讨论 $x=0$ 是否为 $y=f(x)$ 的极值点。

[解]：

（方法 1）若 $f'(0)\neq 0$，则 $x=0$ 不为 $y=f(x)$ 的极值点.

若 $f'(0)=0$，由 $f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=2x$，则 $f''(0)=0$，

$f'''(x)=2-2\left[f'(x)\right]\cdot f''(x),\ f'''(0)=2>0$，

$(0,f(0))$ 必为 $y=f(x)$ 的拐点，因此 $x=0$ 不为 $y=f(x)$ 的极值点。

（方法 2）若 $f'(0)\neq 0$，则 $x=0$ 不为 $y=f(x)$ 的极值点.

若 $f'(0)=0$，由已知等式得　$f''(x)=2x-\left[f'(x)\right]^2$ 为连续函数，

且 $f''(0)=0$，另有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x}=2-\lim_{x\to 0}\frac{\left[f'(x)\right]^2}{x}=2-\lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)\cdot f''(x)}{1}=2>0,$$

因此，由极限保序性得知，$f''(x)$ 在 $x=0$ 两侧变号，

且 $\exists\delta>0$，使当 $-\delta<x<0$ 时，$f''(x)<0$，$f'(x)>0$，

而当 $0<x<\delta$ 时，$f''(x)>0$，$f'(x)>0$，

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 两侧不改变增减性。

因此 $x=0$ 不为 $y=f(x)$ 的极值点。

（方法 3）反证：设 $x=0$ 为 $y=f(x)$ 的极值点，则 $f'(0)=0$，

且 $f''(0)=0$，于是 $f'''(x)=2-2\left[f'(x)\right]\cdot f''(x),\ f'''(0)=2>0$，

$(0,f(0))$ 必为 $y=f(x)$ 的拐点，与 $x=0$ 为 $y=f(x)$ 的极值点相矛盾。

(16)（本题满分 10 分）

计算不定积分 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}}$。

[解]：

（方法 1） $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = -\int \frac{d(\frac{1}{x})}{\sqrt{2x-4}} = -\frac{1}{x\sqrt{2x-4}} - \int \frac{1}{x\sqrt{(2x-4)^3}}dx$，

对第二项取变换 $\sqrt{2x-4} = t$，则 $x = \frac{t^2+4}{2}$， $dx = tdt$，于是

$$\int \frac{1}{x\sqrt{(2x-4)^3}}dx = \int \frac{2tdt}{(t^2+4)t^3}dt = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+4-t^2}{(t^2+4)t^2}dt = \frac{1}{2}\int(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+4})dt$$

$$= -\frac{1}{2}(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}) + C = -\frac{1}{2\sqrt{2x-4}} - \frac{1}{4}\arctan\frac{\sqrt{2x-4}}{2} + C$$

因此 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = \frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + \frac{1}{4}\arctan\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$。

（方法 2） 令 $\sqrt{2x-4} = t$，则 $x = \frac{t^2+4}{2}$， $dx = tdt$，于是

$I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} \int \frac{4dt}{(t^2+4)^2}$，再令 $t = 2\tan u$，则 $dt = 2\sec^2 udu$

$$I = 4\int \frac{2\sec^2 udu}{4^2\cdot\sec^4 u}dt = \frac{1}{2}\int \cos^2 udu = \frac{1}{4}\int(1+\cos 2u)du = \frac{1}{4}u + \frac{1}{8}\sin 2u + C$$

$$= \frac{1}{2}\int(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+4})dt = \frac{1}{4}\arctan\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{t}{\sqrt{4+t^2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{4+t^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\arctan\frac{\sqrt{2x-4}}{2} + \frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + C$$

因此 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = \frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + \frac{1}{4}\arctan\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$。

答案：$\frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + \frac{1}{4}\arctan\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$。

（17）（本题满分 12 分）

若函数 $y = f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且满足条件：

$$f''(x)+x^2\left(f'(x)\right)^3-2f(x)=0 \text{ 及 } f(0)=f(1)=0\,.$$

证明：函数 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上恒为零。

[证]：首先由条件可知，$y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，则其最大值、最小值都存在，且最大点和最小点至少有一个位于开区间 $(0,1)$ 内．设存在 $u\in(0,1)$ 使得 $f(u)\neq 0$：

若 $f(u)>0$，则函数必有正的最大值点 $x_1\in(0,1)$，x_1 必是极大值点，$f'(x_1)=0$．

又由题设条件，$$f''(x_1)+x^2\left(f'(x_1)\right)^3-2f(x_1)=0\,,$$

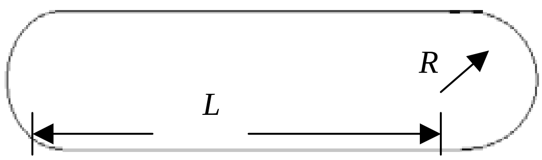
即有，$f''(x_1)=2f(x_1)>0$．由此推知，x_1 是极小值点，这与 x_1 是极大值点矛盾，可见在开区间 $(0,1)$ 内 $f(x)\le 0$．

若 $f(u)<0$，则函数必有负的最小值点 $x_2\in(0,1)$，x_2 必是极小值点，$f'(x_2)=0$．又由题设条件，$$f''(x_2)+x_2^2\left(f'(x_2)\right)^3-2f(x_2)=0\,,$$

即有，$f''(x_2)=2f(x_2)<0$．由此推知，x_2 是极大值点，这与 x_2 是极小值点矛盾，可见在开区间 $(0,1)$ 内 $f(x)\ge 0$。

综上所述必有在 $[0,1]$ 内 $f(x)\equiv 0$，证毕。

（18）（本题满分 12 分）



水平放置的储油罐的罐体如图，中间圆柱体部分长为 L（单位米），半径为 R（单位米），两端为半球，半径也为 R。

（1）若以每小时 Q（单位立方米）的恒定流量从油罐的顶部输入燃油，求：当油罐内燃油容量达到总容量一半时，液面的上升速度。

（2）若油罐平置于地面，油的密度为 ρ（kg/m^3），问要装满这一罐油需要作多少功？

[解]：(1) 液面的高度 h 和罐内燃油的体积 V 都是时间 t 的函数 $h=h(t),\quad V=V(t)$。

$$V(t)=V_1(h)+V_2(h)$$

其中 $V_1(h)$ 为两个半球内的燃油体积，$V_2(h)$ 为圆柱体内的燃油体积。

$$V_1(h)=\int_0^h \pi\left[R^2-(R-h)^2\right]dh=\pi\left[Rh^2-\frac{h^3}{3}\right]$$

$$V_2(h)=L\int_0^h 2\sqrt{R^2-(R-h)^2}\,dh$$

$$=2L\left[\frac{\pi}{4}R^2-\frac{R-h}{2}\sqrt{R^2-(R-h)^2}-\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{R-h}{R}\right]$$

因此

$$V(h)=\pi\left[Rh^2-\frac{h^3}{3}\right]+2L\left[\frac{\pi}{4}R^2-\frac{R-h}{2}\sqrt{R^2-(R-h)^2}-\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{R-h}{R}\right]$$

由已知条件，$V=Qt$，故

$$\pi\left[Rh^2-\frac{h^3}{3}\right]+2L\left[\frac{\pi}{4}R^2-\frac{R-h}{2}\sqrt{R^2-(R-h)^2}-\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{R-h}{R}\right]=Qt$$

两边对 t 求导，当 $h=R$ 时（此时油罐内液面正好到达一半）

$$\frac{dh}{dt}(R)=\frac{Q}{\pi R^2+2LR}$$

(2) $$W=\int_0^{2R}\pi\left[R^2-(R-h)^2\right]\rho\, g\, hdh+\int_0^{2R}2L\sqrt{R^2-(R-h)^2}\ \rho\, g\, hdh$$

$$=\frac{4}{3}\pi\rho\, g\, R^4+2L\rho\, g\, R\int_0^{2R}\sqrt{R^2-(R-h)^2}\,dh$$

$$=\frac{4}{3}\pi\rho\, g\, R^4+\pi\, L\rho\, g\, R^3$$

(19)（本题满分 10 分）

计算累次积分 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$。

[解]：所给累次积分所对应的二重积分的积分域是由 $y=x, y=2, y=\sqrt{x}$ 围成，对此累次积分交换积分顺序，得

$$\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx$$

$$=\int_1^2\frac{2y}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}y\right)dy=\frac{4}{\pi^3}(2+\pi).$$

（20）（本题满分 10 分）

求解二阶微分方程的定解问题 $\begin{cases}\cos y\dfrac{d^2y}{dx^2}+\sin y(\dfrac{dy}{dx})^2=\dfrac{dy}{dx}\\ y(-1)=\dfrac{\pi}{6},\ y'(-1)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$。

[解]：令 $u=\dfrac{dy}{dx}$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=uu'$，原方程化为

$u\cos y\cdot u'+u^2\sin y=u$，　$u=0$，$y=C$ 不复合初值条件，舍去。

$u\neq 0$ 时，得到　$u'+u\tan y=\dfrac{1}{\cos y}$，

解为　$u=y'=\cos y(C_1+\tan y)$，　　由　$y(-1)=\dfrac{\pi}{6},\ y'(-1)=\dfrac{1}{2}$，得 $C_1=0$。

再解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\sin y$ 得到　$\ln|\csc y-\cot y|=t+C_2$，由 $y(-1)=\dfrac{\pi}{6}$ 得出

$C_2=1+\ln(2-\sqrt{3})$，定解问题之解为 $\tan\dfrac{y}{2}=\dfrac{1-\cos y}{\sin y}=\sqrt{\dfrac{1-\cos y}{1+\cos y}}=(2-\sqrt{3})e^{x+1}$。

（21）（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内连续可导，且满足 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot f(x)\,dx=0$，证明:

（1）存在 $\xi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使得 $f'(\xi)=2f(\xi)\tan\xi$.

（2）存在 $\eta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使得　$f'(\eta)=f(\eta)\tan\eta$.

[证]：

(1)　（方法 1）首先由 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot f(x)\,dx=0$，则 $\exists x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，

使得 $\cos^2 x_0 f(x_0)=0$,但 $\cos x_0 \neq 0, \Rightarrow f(x_0)=0$。

另外由积分中值定理得到，取辅助函数

$\varphi(x)=\cos^2 x f(x)$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内可导，

且 $\varphi(x_0)=0,\quad \varphi(\frac{\pi}{2})=0$，因此 $\exists\xi\in(x_0,\frac{\pi}{2})\subset(0,\frac{\pi}{2})$，

使得 $\varphi'(\xi)=-2\sin\xi\cos\xi f(\xi)+\cos^2\xi f(\xi)=0$，

即有 $f'(\xi)=2f(\xi)\tan\xi$.

（方法 2）首先由分部积分，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot f(x)\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(-2\cos x\sin x\cdot f(x)+\cos^2 x\cdot f'(x))dx=0,$$

由被积函数的连续性，则存在 $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得

$\xi(-2\cos\xi\sin\xi\cdot f(\xi)+\cos^2\xi\cdot f'(\xi))=0$，

其次，$\xi\cos\xi\neq 0$, 必有 $-2\sin\xi\cdot f(\xi)-\cos\xi\cdot f'(\xi))=0$，

即有 $f'(\xi)=2f(\xi)\tan\xi$。

（2）再次由分部积分，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot f(x)\,d\sin x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(\cos x\cdot f'(x)-\sin xf(x))dx$$

$$=-(\cos\eta\cdot f'(\eta)-\sin\eta\cdot f(\eta))\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=0$$

其中 $\eta\in(0,\frac{\pi}{2})$。

由于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1\neq 0$, 因此 $\cos\eta\cdot f'(\eta)-\sin\eta\cdot f(\eta))=0$，

即有 $f'(\eta)=f(\eta)\tan\eta$。

（22）（本题满分 9 分）

设矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$，其行列式 $|A|=-1$，又 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征值

λ_0，属于 λ_0 的特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^T$，求 a，b，c，λ_0 的值。

[解]：$A^*\alpha=\lambda_0\alpha, A\cdot A^*=|A|\cdot E$，故有

$$A\cdot A^*\alpha = A\lambda_0\alpha \Rightarrow |A|\alpha = \lambda_0 A\alpha \Rightarrow A\alpha = \frac{|A|}{\lambda_0}\alpha = -\frac{1}{\lambda_0}\alpha$$

代入：A,α：$\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\lambda_0}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-a+1+c)=\dfrac{1}{\lambda_0} & (1) \\ (-5-b+3)=\dfrac{1}{\lambda_0} & (2) \\ (-1+c-a)=-\dfrac{1}{\lambda_0} & (3) \end{cases}$$

（1）－（3）：$\lambda_0=1$　代入（2）：$b=-3$　代入（1）：$a=c$

由　$|A|=-1$　　$a=c$　$\Rightarrow$　$a=c=2$

（23）（本题满分 9 分）

设 $A=\begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$，求实对称阵$B$，使$A=B^2$。

[解]：求特征值 $|\lambda_1-A|=\begin{vmatrix} \lambda-8 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-9)^2=0,\quad \lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=9$

求特征正向量：$\lambda_1=0, x_1=(1\ 2\ 2)^T$　$\eta_1=\frac{1}{3}(1,2,2)^T$

$\lambda=9$　$x_2=(2\ \ \text{-}2\ \ 1)^T$，　$x_3=(2\ \ 1\ \ \text{-}2)^T$（已正交，单位化得）

$\eta_2=\frac{1}{3}(2,-2,1)$　$\eta_3=\frac{1}{3}(2,1,-2)^T$

$T=(\eta_1\eta_2\eta_3)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$为正交阵

$$T^T AT = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 9 & \\ & & 9 \end{bmatrix},\ A = T\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 9 & \\ & & 9 \end{bmatrix}T^T = T\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix}T^T T\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix}T^T = B^2$$

$$B = T\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix}\mathrm{T}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$