清华大学数学系教授　刘坤林 俞正光 谭泽光 葛余博

# 数学(一)试题

## 一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin x}=$___________.

(2) 求 $\int\dfrac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}dx=$________.

(3) 满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 及方程 $2yy''=1+(y')^2$ 得特解__________.

(4) 给定平面曲线 $L: x+\left(y-\sqrt{r^2-1}\right)^2=r^2$, 计算：$\int_L (x-y)^2\, dl$ ________________.

(5) 设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素均为 $1$，则 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个特征值是___________.

(6) 设 $X$ 表示 10 次独立重复射击中命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.4，则 $EX^2$ ________.

## 二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 设函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续且无零点，$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\dfrac{1}{f(t)}dt$，则方程 $F(x)=0$

在 $(a,b)$ 内根的个数恰为（　　）

(A) 0． (B) 1． (C) 2． (D) 3．

(8) 设 $\delta>0$，$f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内恒有 $f''(x)>0$，且 $|f(x)|\le x^2$，记 $I=\int_{-\delta}^{\delta}f(x)dx$，

则必有（　　）

(A) $I=0$． (B) $I>0$． (C) $I<0$． (D) 不确定．

(9) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则必收敛的级数为（　　）．

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$;　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{\ 2}$;　　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{2n})$;　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$.

(10) 设 $\vec{r}=(x,y,z)^T$，$r$ 为 $\vec{r}$ 的模，设 $S_1:r=1$ 外侧为正，$S_2:r=\frac{1}{2}$ 外侧为正。$\vec{r}$ 为 $S_1, S_2$ 外侧法矢量，若 $\oiint\limits_{S_1}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS=I$，则 $\oiint\limits_{S_2}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^3}dS=$ [　　]

(A) $I$　；　　(B) $\frac{1}{2}I$　；　　(C) $2I$　；　　(D) $0$ .

(11) 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4\\ 1 & 5 & 15 & -8 & 0\end{pmatrix}$，则以下错误的结论是(　　)

(A) $A$ 的所有三阶子式全为 0　　(B) $A$ 的任意两个列向量线性无关
(C) $A$ 的任意两个行向量线性无关　　(D) $A$ 的秩为 2

(12) 设 $A_1,A_2\in M_n$，$b_1,X_1,X_2\in R^n$，则线线方程组 $\begin{cases}A_1X_1=b_1\\ A_2X_2=0\end{cases}$ 有解的充分必要条件是(　　)

(A) $A_1X_1=b_1$ 有解　　(B) $A_2X_2=0$ 有解　　(C) $|A_2|\neq 0$　(D) $|A_1|\neq 0$

(13) 设 $P(A|B)=P(B|A)=\frac{1}{4}$，$P(\bar{A})=\frac{2}{3}$. 则（　　）

(A) $A$ 与 $B$ 独立，且 $P(A\cup B)=5/12$;

(B) $A$ 与 $B$ 独立，且 $P(A)=P(B)$;

(C) $A$ 与 $B$ 不独立，且 $P(A\cup B)=7/12$;

(D) $A$ 与 $B$ 不独立，且 $P(A|\bar{B})=P(A|B)$.

(14) 设总体X二阶矩存在，$X_1, X_2, \ldots, X_n$是其简单样本，$n>1$，样本均值为 $\bar{X}$. 则对X期望$\mu$估计时，（　　）.

(A) $(X_1+\bar{X})/2$ 不是无偏，但它比 $\bar{X}$ 更有效.

(B) $(X_1+\bar{X})/2$ 比 $\bar{X}$ 更有效.

(C) 利用切贝雪夫定理，$(X_1+\bar{X})/2$ 以概率收敛于 0，因此是$\mu$的一致估计.

(D) $\bar{X}$ 比 $(X_1+\bar{X})/2$ 更有效.

三、 解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

(15)（本题满分 12 分）

设常数 $a\neq 0, b\neq 0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos ax+\sin bx\right)^{\cot x}$。

(16)（本题满分 10 分）

证明 $\int_0^{\pi}\frac{xf\left(\sin x\right)}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{f\left(\sin x\right)}{1+\cos^2 x}dx.$

(17)（本题满分 12 分）

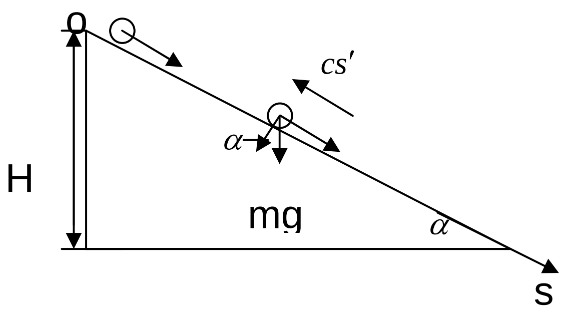
设空间一光滑曲面 $S$ 的方程为 $F(x,y,z)=0$，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面 $S$ 外的一点.证明：若 $S$ 上的点 $Q$ 使得线段 $P_0Q$ 是 $P_0$ 与 $S$ 上任意一点连线的最短线段，则向量 $\overrightarrow{P_0Q}$ 必与曲面 $S$ 在该点的切平面垂直。

(18)（本题满分 12 分）

设 $a_n>0$ 单调减少且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n a_n$ 发散，试问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛，说明理由.

(19)（本题满分 12 分）

一小球质量为 $M$ 沿一与水平成 $\alpha$ 角的斜面从高为 $H$ 处，由静止开始滚下，设小球受到的空气阻力与其运动速度成正比，比例系数为 $c\geq 0$，忽略摩擦力，求运动规律。




(20)（本题满分 8 分）

已知 4 元线性方程组 $Ax=b$ 的 3 个解 $\xi_1$，$\xi_2$，$\xi_3$，且 $\xi_1+\xi_2=(1,0,1,2)^T$，$\xi_3=(3,2,-1,4)^T$，而 $r(A)=3$，求该线性方程组的通解.

（21）（本题满分 10 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda$， $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda$ 的特征向量为 $\boldsymbol{x}$，求 $5\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 的特征值和特征向量，并求 $\boldsymbol{A}^T$ 的特征值.

（22）（本题满分 9 分）

一汽车沿一街道行驶，需要通过三个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号灯显示的时间相等，以 X 表示该汽车首次遇到红灯起前已通过的路口个数，求 X 的概率分布.

（23）（本题满分 9 分）

某厂生产一批产品，共 80 件，须经检验合格才能出厂.按规定，次品率不能超过 1%.今在其中任意抽取 2 件，发现有次品，问这批产品能否允许出厂？从直观上看，似乎是不能出厂.假设产品的次品率为 $p$，问题化为：如何根据抽样的结果来判断“ $p \le 0.01$ ”是否成立？