清华大学数学系教授　刘坤林 俞正光 谭泽光 葛余博

数学(二)试题

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin x}=$____________.

(2) 设 $g(x)=x(x+1)(2x+1)(3x-1)$，则方程 $g'(x)=0$ 在 $(-1,0)$ 内有________个实根.

(3) $\int_0^{\pi}(e^{\cos x}-e^{-\cos x})dx=$__________.

(4) 二阶常系数线性微分方程 $y''-3y'+2y=e^x$ 有一个形如____的特解(不必确定系数)..

(5) 设 $\Delta y=\dfrac{y}{1+x}\Delta x+\alpha(\Delta x)$，其中 $\alpha(\Delta x)$ 满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}=0$，若已知 $y(2)=5$, 求 $y'(2)=$__________________.

(6) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素均为1，则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值是___________.

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 设 $\delta>0$，$f(x)$ 在区间 $(-\delta,\ \delta)$ 内恒有 $f''(x)>0$，且 $|f(x)|\le x^2$，记 $I=\int_{-\delta}^{\delta}f(x)dx$，则必有（　）

(A) $I=0$.　(B) $I>0$.　(C) $I<0$.　(D) 不确定.

(8) 设 $f(x),g(x)$ 定义在 $(-1,1)$ 上，且都在 $x=0$ 处连续，若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ 则

____

(A) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$且$g'(0)=0;$　　(B) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$且$g'(0)=1;$

(C) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$且$g'(0)=0;$　　(D) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$且$g'(0)=2.$

(9) 若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\neq 0$，则$\exists\delta>0$，使________。

(A) 当$|x\text{-}x_0|<\delta$时，$f(x)\neq 0;$　　(B) $f(x_0)\neq 0;$

(C) 当$0<|x\text{-}x_0|<\delta$时，$f(x)=0;$　　(D) $f(x)$在x_0处没有定义.

(10) 设函数$z=f(x,y)$有$f_x'(0,0)=-3,\ \ f_y'(0,0)=1$，则（　　）

(A) 函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的全微分必是$-3dx+dy$；

(B) 函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某邻域内有定义;

(C) 极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$必存在;

(D) 曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$在点$(0,0)$的一个切线矢量为$(1,0,-3)^T$.

(11) 微分方程　$y''+2y'+y=1+e^{-x}+e^{x}$　必有如下形式之解（　　）

(A) $Y=A+Be^{-x}+Ce^{x}$　　(B) $Y=A+Bxe^{-x}+Ce^{x}$

(C) $Y=A+Be^{-x}+Dxe^{x}$　　(D) $Y=1+Bx^2e^{-x}+Ce^{x}$

其中A,B,C,D为待定常数.

(12) 已知连续曲线$y=f(x)$关于点$(a,\ 0)$ $(a\neq 0)$对称，则$\forall c\in R$，$\int_{-c}^{c} f(a-x)dx=$

（　　）

(A) $2\int_0^c f(2a-x)dx$.　(B) $2\int_{-c}^0 f(2a-x)dx$. (C) $2\int_0^a f(c-x)dx$.　(D) 0 .

(13) 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 15 & -8 & 0 \end{pmatrix}$，则以下错误的结论是(　　)

(A) A的所有三阶子式全为0　　(B) A的任意两个列向量线性无关

(C) A的任意两个行向量线性无关　　(D) A的秩为2

(14) 设 A, B 为 n 阶方阵，A 非零且 AB=0, 则__________。

(A)　$B=0$;　　(B)　$|B|=0$或$|A|=0$;

(C)　$BA=0$;　　(D)　$(A-B)^2=A^2+B^2$.

三、 解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

(15)（本题满分 10 分）

求 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\geq 0 \\ e^x, & x<0 \end{cases}$ 满足 $F(0)=1$ 的原函数 $F(x)$.

(16)（本题满分 12 分）

设常数 $a\neq 0, b\neq 0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax+\sin bx)^{\cot x}$ 。

(17)（本题满分 12 分）

设空间一光滑曲面 S 的方程为 $F(x,y,z)=0$, $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面 S 外的一点.证明：若 S 上的点 Q 使得线段 P_0Q 是 P_0 与 S 上任意一点连线的最短线段，则向量 $\overrightarrow{P_0Q}$ 必与曲面 S 在该点的切平面垂直。

(18)（本题满分 11 分）

设 $0<c<1$，证明函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在$[c,1]$上一致连续.

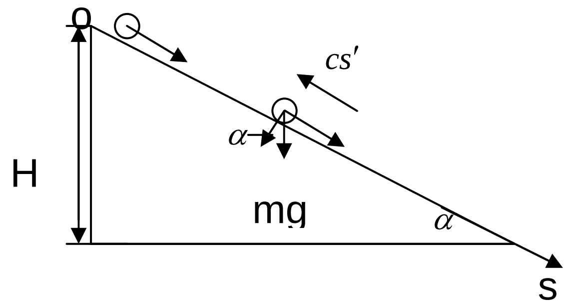
(19)（本题满分 11 分）

设 $a_n>0\,(n=1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$, 试证明：　(1) 序列 $\{a_n\}$ 单调减；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(20)（本题满分 10 分）

一小球质量为 M 沿一与水平成 α 角的斜面从高为 H 处，由静止开始滚下，设小球受到

的空气阻力与其运动速度成正比，比例系数为$c \geq 0$，忽略摩擦力，求运动规律。



(21)（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 导数连续， $f(\pi)=1$，且方程$\left(\sin x - f(x)\right)\dfrac{y}{x}dx + f(x)dy = 0$是全微分方程，求 $f(x)$ 及方程之通解.

(22)（本题满分 9 分）

已知 4 元线性方程组 $Ax=b$ 的 3 个解ξ_1，ξ_2，ξ_3，且$\xi_1+\xi_2=(1,0,1,2)^T$，$\xi_3=(3,2,-1,4)^T$，而$r(A)=3$，求该线性方程组的通解.

(23)（本题满分 9 分）

设λ是n阶矩阵λ $\boldsymbol{A}$的一个特征值，且$\boldsymbol{A}$是可逆的，证明：

(1) $\dfrac{1}{\lambda}$是$\boldsymbol{A}^{-1}$的一个特征值；

(2) $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$的特征值.