水木艾迪考研辅导班　　教学与命题研究中心
清华大学数学系教授　刘坤林 俞正光 谭泽光 葛余博

数学(三)试题

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 设 $g(x)=x(x+1)(2x+1)(3x-1)$，则方程 $g'(x)=0$ 在 $(-1,0)$ 内有_______个实根.

(2) $\int_0^{\pi}(e^{\cos x}-e^{-\cos x})dx=$_________.

(3) 求极限 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin x}=$___________.

(4) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素均为 1，则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值是__________.

(5) 设 X 表示 10 次独立重复射击中命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.4，则 EX^2________.

(6) 设 A,B 为两事件，且 $P(A)=p,P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$，则 $P(B)=$______________。

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 设 $\delta>0$，$f(x)$ 在区间 $(-\delta,\ \delta)$ 内恒有 $f''(x)>0$，且 $|f(x)|\le x^2$，记 $I=\int_{-\delta}^{\delta}f(x)dx$，则必有（　　）

(A) $I=0$.　(B) $I>0$.　(C) $I<0$.　(D) 不确定.

(8) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\neq 0$，则 $\exists\delta>0$，使________。

(A) 当 $|x\text{-}x_0|<\delta$ 时，$f(x)\neq 0$;　(B) $f(x_0)\neq 0$;
(C) 当 $0<|x\text{-}x_0|<\delta$ 时，$f(x)=0$;　(D) $f(x)$ 在 x_0 处没有定义.

(9) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可到的一个充分条件是(　).

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在；　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{2h}\left[f(a+h)-f(a-h)\right]$存在；

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left[f(a+2h)-f(a+h)\right]$存在；$(D)$ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left[f(a)-f(a-h)\right]$.

(10) 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则必收敛的级数为（　　）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}$;　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^{\ 2}$;　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{2n})$;　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$.

(11) 微分方程 $y''+2y'+y=1+e^{-x}+e^{x}$ 必有如下形式之解（　　）

(A) $Y=A+Be^{-x}+Ce^{x}$　(B) $Y=A+Bxe^{-x}+Ce^{x}$

(C) $Y=A+Be^{-x}+Dxe^{x}$　(D) $Y=1+Bx^2e^{-x}+Ce^{x}$

其中A,B,C,D为待定常数.

(12) 设 A, B 是三阶方阵，$|A|=-2, A^3-ABA+2I=0$，则$|A-B|=$____.

(A) 2；　(B) －2；　(C) 1/2；　(D) －1/2.

(13) 设$A_1, A_2\in M_n$，$b_1, X_1, X_2\in R^n$，则线线方程组$\begin{cases}A_1X_1=b_1\\ A_2X_2=0\end{cases}$有解的充分必要条件是（　）

(A) $A_1X_1=b_1$有解　(B) $A_2X_2=0$有解　(C) $|A_2|\neq 0$　(D) $|A_1|\neq 0$

(14) 设$P(A)>0$，$P(B)>0$，且A与B二事件互斥，下列关系式正确的是（　　）。

(A) $P(B)=P(B|A)$　(B) $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$

(C) $P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A)}{1-P(B)}$　(D) $P(B)=1-P(A)$

三、 解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

(15)（本题满分 10 分）

设常数$a\neq 0,b\neq 0$, 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos ax+\sin bx\right)^{\cot x}$。

(16)（本题满分 12 分）

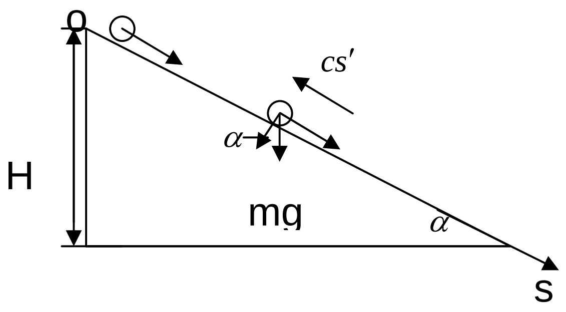
设$f\left(x\right)=\left(x+1\right)^{2}\ln\left(1-x\right)$,求$f^{(n)}\left(-1\right)$.

(17)（本题满分 12 分）

设$a_n>0$单调减少且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n}a_n$发散，试问$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^{n}$是否收敛，说明理由

(18)（本题满分 12 分）

一小球质量为M沿一与水平成α角的斜面从高为H处，由静止开始滚下，设小球受到的空气阻力与其运动速度成正比，比例系数为$c\geq 0$，忽略摩擦力，求运动规律。



(19)（本题满分 12 分）

设$u=f(x,y,z)$在Ω上连续，若对Ω内任一子区域V，均有

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=0.$$

证明$f(x,y,z)$在Ω上恒为零.

(20)（本题满分 8 分）

设由 3 维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{bmatrix},$$

问λ取何值时有

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表达式唯一？

（2）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表达式不唯一？

（3）$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？

(21)（本题满分 10 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$. 问它们是否相似？是否合同？为什么？

(22)（本题满分 9 分）

袋中有 α 个白球及 β 个黑球. ①从袋中任取 $a+b$ 个球，试求所取的球恰含有 a 个白球和 b 个黑球的概率 $(a\le\alpha, b\le\beta)$；②从袋中任意地连接取出 $k+1$ 个 $(k+1\le\alpha+\beta)$ 个球，如果每球被取出后不放回，试求最后取出的球是白球的概率.

(23)（本题满分 9 分）

一台设备由三大部件构成，在设备运转中各部件需要调整的概率相应为 0.10，0.20 和 0.30，假设各部件的状态相互独立，以 X 表示同时需要调整的部件数，试求 X 的数学期望 EX 和方差 DX .