数学(四)试题

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin x}=$____________.

(2) $\int_0^{\pi}(e^{\cos x}-e^{-\cos x})dx=$__________.

(3) 设 $f^{'}(a)$ 存在，则极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{h}$____.

(4) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素均为1，则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值是___________.

(5) 设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的各行元素之和均为零，且 $\mathbf{A}$ 的秩为 $n-1$，则线性方程组 $\mathbf{A}x=0$ 的通解为______.

(6) 设 A,B 为两事件，且 $P(A)=p,P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$，则 $P(B)=$________________。

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\neq 0$，则 $\exists\delta>0$，使__________。

(A) 当$|x\text{-}x_0|<\delta$时，$f(x)\neq 0$;　　　　(B) $f(x_0)\neq 0$;

(C) 当$0<|x\text{-}x_0|<\delta$时，$f(x)=0$;　　　　(D) $f(x)$在x_0处没有定义.

(8) 设 $f(x),g(x)$ 定义在 $(-1,1)$ 上，且都在 $x=0$ 处连续，若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$，

则____

(A) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$且$g'(0)=0$;　　(B) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$且$g'(0)=1$;

(C) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$且$g'(0)=0$;　　(D) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$且$g'(0)=2$

(9) 设 $f(x)$ 为可导函数，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处切线的斜率为____

(A) 2；　(B) −1；　(C) 1/2；　(D) −2.

(10) 设 $f(x)$在$x=a$ 的某邻域内有定义，则 $f(x)$在$x=a$ 处可到的一个充分条件是(　).

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在；

(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{2h}\left[f(a+h)-f(a-h)\right]$存在；

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left[f(a+2h)-f(a+h)\right]$存在；

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left[f(a)-f(a-h)\right]$.

(11) 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)dx$, 则 I_1 与 I_2 的关系为________。

(A) $I_1<I_2$　　(B) $I_1>I_2$

(C) $I_1=I_2$　　(D) 不确定

(12) 设 $A_1,A_2\in M_n$，$b_1,X_1,X_2\in R^n$，则线线方程组$\begin{cases}A_1X_1=b_1\\A_2X_2=0\end{cases}$有解的充分必要条件是(　)

(A) $A_1X_1=b_1$ 有解　(B) $A_2X_2=0$ 有解　(C) $|A_2|\neq 0$　(D) $|A_1|\neq 0$

(13) 设 $P(A)>0$，$P(B)>0$，且 A 与 B 二事件互斥，下列关系式正确的是（　）。

(A) $P(B)=P(B|A)$　　(B) $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$

(C) $P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A)}{1-P(B)}$　　(D) $P(B)=1-P(A)$

(14) 设 $P(A|B)=P(B|A)=\dfrac{1}{4}$ ，$P(\overline{A})=\dfrac{2}{3}$. 则（　　）

(A) A 与 B 独立，且 $P(A\cup B)=5/12$;

(B) A 与 B 独立，且 $P(A)=P(B)$;

(C) A 与 B 不独立，且 $P(A\cup B)=7/12$;

(D) A 与 B 不独立，且 $P(A|\overline{B})=P(A|B)$.

三、 解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

(15)（本题满分 10 分）

设常数 $a\neq 0, b\neq 0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax+\sin bx)^{\cot x}$。

(16)（本题满分 10 分）

设 $f(x)$在$x=0$某邻域内可导，$x\neq 0$时$f(x)\neq 0$，已知 $f(0)=0, f'(0)=2$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2f(x))^{\frac{1}{\sin x}}$.

(17)（本题满分 12 分）

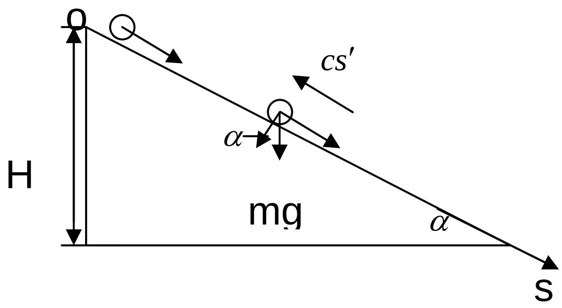
设$0<c<1$，证明函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$在$[c,1]$上一致连续.

(18)（本题满分 11 分）

设 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & -1\le x<0 \\ e^x-1, & 0\le x<1 \end{cases}$，求 $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$.

(19)（本题满分 13 分）

一小球质量为 M 沿一与水平成 α 角的斜面从高为 H 处，由静止开始滚下，设小球受到的空气阻力与其运动速度成正比，比例系数为 $c\ge 0$，忽略摩擦力，求运动规律。



(20)（本题满分 11 分）

设 A 是 n 阶矩阵，满足 $AA^T = I, |A| < 0$.求 $|A+I|$.

(21)（本题满分 9 分）

已知 4 元线性方程组 $Ax = b$ 的 3 个解 ξ_1，ξ_2，ξ_3，且 $\xi_1 + \xi_2 = (1, 0, 1, 2)^T$，$\xi_3 = (3, 2, -1, 4)^T$，而 $r(A) = 3$，求该线性方程组的通解.

(22)（本题满分 8 分）

一民航班车上共有 20 名旅客，自机场开出，旅客有 10 个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车，以 X 表示停车的次数，求 EX （设每位旅客再各车站下车是等可能的）.

(23)（本题满分 10 分）

已知 $X \sim N\left(2, \sigma^2\right), P(2 < X < 4) = 0.3$ 求 $P(X < 0)$.