数学(一)试题

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 设 $0<x<\frac{\pi}{2}$，取 $a_1=\sin x, a_n=\sin a_{n-1}\left(n=2,3,\cdots\right)$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$______________.

(2) Ω 是位于锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 之上,球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ 之下的区域,在球坐标下 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dV$ 的累次积分为__________________________。

(3) 若某二阶线性非齐次微分方程的两个解为 $3+x^2$，$e^{-x}+3+x^2$，且相应齐次方程的一个解为 x，则该非齐次方程的通解为______________________________。

(4) $I=\int_0^a dx\int_x^a e^{-y^2}dy=$________。

(5) 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$,而 $n\geq 2$ 为正整数，则 $A^n-2A^{n-1}=$____.

(6) 设 X 是一随机变量，其概率密度为 $f\left(x\right)=\begin{cases}1+x, & -1\leq x\leq 0,\\ 1-x, & 0<x\leq 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 则 $DX=$_______。

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)$ 存在，则下列正确选项为___________.

(A) $\exists$M>0及 x^0 之去心邻域 $N^*\left(x_0,\delta\right)$,使当 $x\in N^*$ 时，$f\left(x\right)>M$;

(B) $\exists$M>0及 x^0 之去心邻域 $N^*\left(x_0,\delta\right)$,使当 $x\in N^*$ 时，$f\left(x\right)<M$;

(C) $\exists$M>0及 x^0 之邻域 $N^*\left(x_0,\delta\right)$,使当 $x\in N$ 时,$\left|f\left(x\right)\right|<M$;

(D) $\exists$M>0,$\left|f\left(x\right)\right|<M$.

(8) 设 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义，则下列选项中，与 $f'(x_0)$ 存在不等价的是__________。

(A) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x_0+kx)-f(x_0)}{x}$ 存在（$k\neq0$或1）；

(B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x_0+\alpha(x))-f(x_0)}{\alpha(x)}$，其中 $\alpha(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to0}\alpha(x)=0$；

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[f\left(x_0-\dfrac{1}{x}\right)-f(x_0)\right]$ 存在；

(D) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x_0-x)-f(x_0)}{\sin x}$ 存在

(9) 设 $\varphi(x)$ 在【0，a】上连续，对 $x\in(0,a)$，满足下列等式：$f_1(x)=\int_0^x\varphi(t)dt$，

$f_k(x)=\int_0^x f_{k-1}(t)\varphi(t)dt$，$(k=2,3,\ldots)$，则由已知函数 $f_1(x)=$_____。

(A) $\dfrac{1}{k}f_1(x)$;　　(B) $\dfrac{1}{k}[f_1(x)]^k$;

(C) $\dfrac{1}{k!}[f_1(x)]^k$;　　(D) $\dfrac{1}{(k-1)!}[f_1(x)]^k$;

(10) 若 $I_1=\iint\limits_D(x+y)^2d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D(x-y)^2d\sigma$，$D:0\le y\le\sqrt{r^2-x^2}$，则（　　）

(A) $I_1=I_2$；　(B) $I_1>I_2$；　(C) $I_1<I_2$；　(D) I_1 与 I_2 之大小相等关系不定而与 r 有关.

(11) 设 A, B 为 n 阶方阵，满足等式 AB=0, 则必有（　　）

(A) $A=0$或$B=0$;　　(B) $A+B=0$;

(C) $|A|=0$或$|B|=0$;　　(D) $|A|+|B|=0$.

(12) 下列命题正确的是（　　）

(A) 如 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解；

(B) 如 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 解不唯一；

(C) 如 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有无穷多个解，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 也有无穷多个解；

(D) 如 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有无穷多个解，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 也有无穷多个解；

(13) 已知 X_1,X_2,X_3 独立且服从 $N(0,\sigma^2)$， Z=$\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{X_1+X_2+X_3}{|X_3-X_2|}$，则（　　）。

(A) $Z\sim N(0,\sigma^2)$　(B) $Z\sim\chi^2(3)$　(C) $Z\sim t(2)$　(D) $Z\sim t(1)$

(14) 设总体X二阶矩存在，X_1，X_2，…，X_n是其简单样本，n>1，样本均值为 $\bar{X}$．则对X期望估计时，（　　）．

(A) $(X_1+\bar{X})/2$ 不是无偏，但它比 $\bar{X}$ 更有效．

(B) $(X_1+\bar{X})/2$ 比 $\bar{X}$ 更有效．

(C) 利用切贝雪夫定理，$(X_1+\bar{X})/2$ 以概率收敛于 0，因此是一致估计．

(D) $\bar{X}$ 比 $(X_1+\bar{X})/2$ 更有效．

三、　解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．)

(15)（本题满分 11 分）

设 $a_n>0,\{a_n\}$ 为单调减序列，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，试证 $\lim_{n\to\infty}na_n=0.$

(16)（本题满分 12 分）

求 $\iint_D(x+6y)d\sigma$，其中 $D:\begin{cases}y-x\ge 0,\\5x-y\ge 0。\\x-1\le 0.\end{cases}$

(17)（本题满分 11 分）

设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上有二阶导数，且 $f(1)=f(2)=0$， $F(x)=(x-1)^2f(x)$，证明：$\exists x_0\in(1,2)$ 使得 $F''(x_0)=0$．

(18)（本题满分 12 分）

高温物体冷却遵循所谓冷却定理：“物体冷却的速度与该物体和周围的温差成正比。”设某物体开始温度为 100^oC，放在 20^oC 的空气中，头 600s 下降 60^oC，问从 100^oC 下降到

$25^{o}C$，需用多少时间？

(19)（本题满分 12 分）

求 $I=\oiint\limits_{S} x^3 dy\wedge dz + y^3 dz\wedge dx + z^3 dx\wedge dy$, 其中 $S: x^2+y^2+z^2=2ax$, 外侧为正向.

(20)（本题满分 8 分）

已知下列非齐次线性方程组

（Ⅰ）$\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6 \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3=3 \end{cases}$　　（Ⅱ）$\begin{cases} x_1+mx_2-x_3-x_4=-5 \\ nx_2-x_3-2x_4=-11 \\ x_3-2x_4=-t+1 \end{cases}$

(1) 求解方程组（Ⅰ），用其导出组的基础解系表示通解.

(2) 当方程组（Ⅱ）中的参数 m,n,t 为何值时，方程组（Ⅰ）和（Ⅱ）同解。

(21)（本题满分 10 分）

判断三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=7x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-4x_1x_3$ 的正定性.

(22)（本题满分 9 分）

设总体 $X\sim U(0,\theta)$， X_1,X_2,X_3 是 X 的一个容量为 3 的样本， X 的分布函数为

$$F(x;\theta)=\begin{cases} 1, & x\ge\theta, \\ \dfrac{x}{\theta}, & x\in(0,\theta), \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

试证：$\dfrac{4}{3}\max\limits_{1\le i\le 3} X_i, 4\min\limits_{1\le i\le 3} X_i$ 都是 θ 的无偏估计，并比较它们哪个更有效？

(23)（本题满分 9 分）

某工厂采用新法处理废水，对处理后的水测量所含某种有毒物质的浓度，得到 10 个数据（单位：mg/L）：22，14，17，13，21，16，15，16，19，18.。而以往用老方法处理废水后，该种有毒物质的平均浓度为 19.问新方法是否比老法效果好？假设检验水平 $\alpha=0.05$, 有毒物质浓度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.