数学(二)试题

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，取 $a_1=\sin x, a_n=\sin a_{n-1}\left(n=2,3,\cdots\right)$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$________.

(2) $I=\int_0^a dx\int_x^a e^{-y^2}dy=$________。

(3) 若 $e^{\tan x}-e^x$ 是 x^n 的同阶无穷小量 $(x\to 0)$，求 $n=$________。

(4) 设 $\int xf(x)dx=\arcsin x+c$，则 $\int \dfrac{1}{f(x)}dx=$________。

(5) 设 $\boldsymbol{f(x,y)=\sqrt{|xy|}}$，则 $\boldsymbol{f_x'(0,0)=}$ $\underline{\boldsymbol{0}}$，$\boldsymbol{f(x,y)}$ 在 $\boldsymbol{(0,0)}$ 处可微性结论是________.

(6) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素均为1，则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值是________.

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ 存在，则下列正确选项为________.

(A) $\exists$M>0及x^0之去心邻域$N^*\left(x_0,\delta\right)$,使当$x\in N^*$时，$f\left(x\right)>M$;

(B) $\exists$M>0及x^0之去心邻域$N^*\left(x_0,\delta\right)$,使当$x\in N^*$时，$f\left(x\right)<M$;

(C) $\exists$M>0及x^0之邻域$N^*\left(x_0,\delta\right)$,使当$x\in N$时,$\left|f\left(x\right)\right|<M$;

(D) $\exists$M>0,$\left|f\left(x\right)\right|<M$.

(8) 设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 $f\left(x\right)$在$x=0$ 处必有________

(A) 极限不存在；　(B) 极限存在但不连续；

(C) 连续但不可导；　(D) 可导.

（9）设 $\varphi(x)$ 在【0，a】上连续，对 $x\in(0,a)$，　满足下列等式：$f_1(x)=\int_0^x\varphi(t)dt$,

$f_k(x)=\int_0^x f_{k-1}(t)\varphi(t)dt$，$(k=2,3,\ldots)$,则由已知函数 $f_1(x)=$____。

(A)　$\frac{1}{k}f_1(x)$;　　(B)　$\frac{1}{k}\left[f_1(x)\right]^k$；

(C)　$\frac{1}{k!}\left[f_1(x)\right]^k$；　　(D)　$\frac{1}{(k-1)!}\left[f_1(x)\right]^k$；

（10）设 $\delta>0$, $f(x)$在区间$(-\delta,\delta)$内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\le x^2$,

则$x=0$必是$f(x)$的_________

(A)　间断点；　　(B)　连续而不可导的点；

(C)　可导的点，且 $f'(0)=0$；　　(D)　可导的点，且 $f'(0)\neq 0$.

(11)设 $\delta>0$，$f(x)$ 在区间 $(-\delta,\ \delta)$ 内恒有 $f''(x)>0$，且 $|f(x)|\le x^2$，记 $I=\int_{-\delta}^{\delta}f(x)dx$，

则必有（　　）

(A) $I=0$.　(B)　$I>0$.　(C)　$I<0$.　(D) 不确定.

（12）设函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的两个不同特解，则该方程的通解为

（　　）

(A) $y=C_1y_1+C_2y_2$。　　(B)　$y=y_1+Cy_2$。

(C)　$y=y_1+C(y_1+y_2)$。　　(D)　$y=C(y_2-y_1)$　。

（13）下列命题正确的是（　　）

(A) 如 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解；

(B) 如 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 解不唯一；

(C) 如 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有无穷多个解，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 也有无穷多个解；

(D) 如 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有无穷多个解，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 也有无穷多个解；

(14) 设 A, B 为 n 阶方阵，满足等式 AB=0, 则必有（　　）

(A)　$A=0$或$B=0$;　　　(B)　$A+B=0$;

(C)　$|A|=0$或$|B|=0$;　　　(D)　$|A|+|B|=0$.

三、　解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

(15)（本题满分 10 分）

设 $y=y(x)$由$\begin{cases} x=\ln t \\ y=\sqrt[3]{t} \end{cases}$ 确定，求 y_x''.

(16)（本题满分 11 分）

求$\iint\limits_D (x+6y)d\sigma$，其中 $D:\begin{cases} y-x\geq 0, \\ 5x-y\geq 0。\\ x-1\leq 0. \end{cases}$

(17)（本题满分 11 分）

设 $f(x)$为连续奇函数，记$F(x)=\int_0^x \frac{f(t)dt}{1+t^2}$，求$F'(0)$。

(18)（本题满分 12 分）

设 $f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的连续奇函数，证明$\forall a\in R$，有$\int_{-a}^a f(x)dx=0$。

(19)（本题满分 11 分）

设 $f(x)\in C[a,b]$, $f(x)\geq 0$且不恒为零，证明$\int_a^b f(x)dx>0$.

(20)（本题满分 11 分）

$f(x)$是以$T>0$为周期的周期函数.试证明$\frac{dy}{dx}+kx=f(x)$有唯一的以T为周期的周期函数解，其中 k 为常数.

(21)（本题满分 10 分）

高温物体冷却遵循所谓冷却定理："物体冷却的速度与该物体和周围的温差成正比。"设某物体开始温度为$100^o C$，放在$20^o C$的空气中，头 600s 下降$60^o C$，问从$100^o C$下降到$25^o C$，需用多少时间？

(22)（本题满分 9 分）

设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathbf{A}$ 为 $n\times s$ 矩阵，证明$(\mathbf{AB})x=0$与$\mathbf{B}x=0$的充分必要条件是$r(\mathbf{AB})=r(\mathbf{B})$.

(23)（本题满分 9 分）

已知 4 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=b_3 \end{cases}$$

的 5 个解，它们是$\mathbf{x}_1=(1,1,1,0)^T$，$\mathbf{x}_2=(2,2,1,0)^T$，$\mathbf{x}_3=(0,0,1,0)^T$，$\mathbf{x}_4=(3,1,2,0)^T$，$\mathbf{x}_5=(0,1,1,1)^T$，试求此方程组的一般解，并写出该方程组.