

数学(四)试题

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,把答案填在题中横线上)

(1) $I = \int_0^a dx \int_x^a e^{-y^2} dy = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 取 $a_1 = \sin x, a_n = \sin a_{n-1} (n = 2, 3, \dots)$, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 函数 $y = x^2 - \frac{1}{x}$ 的上凸区间为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4)
$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$$
。

(5) 设4阶方阵A的秩为2, 则其伴随矩阵 A^* 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(6) 设 X 是一随机变量, 其概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 则 $DX = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分,在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内。)

(7) 设 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义, 则下列选项中, 与 $f'(x_0)$ 存在不等价的是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + kx) - f(x_0)}{x}$ 存在 ($k \neq 0$ 或 1) ;

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha(x)) - f(x_0)}{\alpha(x)}$, 其中 $\alpha(x) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$;

(C) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[f \left(x_0 - \frac{1}{x} \right) - f(x_0) \right]$ 存在；

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{\sin x}$ 存在

(8) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处必有_____。

(A) 极限不存在； (B) 极限存在但不连续；

(C) 连续但不可导； (D) 可导。

(9) 设 $\delta > 0$, $f(x)$ 在区间 $(-\delta, \delta)$ 内有定义, 若当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时, 恒有 $|f(x)| \leq x^2$, 则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的_____。

(A) 间断点； (B) 连续而不可导的点；

(C) 可导的点, 且 $f'(0) = 0$ ； (D) 可导的点, 且 $f'(0) \neq 0$ 。

(10) 若在 $[0, 1]$ 上有 $f(0) = g(0) = 0, f(1) = g(1) = a > 0$, 且 $f''(x) > 0, g''(x) < 0$, 则积分 $I_1 = \int_0^1 f(x) dx, I_2 = \int_0^1 g(x) dx, I_3 = \int_0^1 ax dx$ 的大小关系是_____。

(A) $I_1 \geq I_2 \geq I_3$ (B) $I_3 \geq I_2 \geq I_1$ (C) $I_2 \geq I_3 \geq I_1$ (D) $I_2 \geq I_1 \geq I_3$

(11) 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $F(x)$, a, b 为非零常数, 则 $\int f(ax^2 + b) dx =$ _____。

(A) $\frac{F(x)}{a^2} + c$ (B) $a^2 F(x) + c$ (C) $F(a^2 x + b) + c$ (D) $\frac{1}{a^2} F(a^2 x + b) + c$

(12) 下列命题正确的是 ()

(A) 如 $Ax = 0$ 只有零解, 则 $Ax = b$ 有唯一解；

(B) 如 $Ax = b$ 有唯一解, 则 $Ax = 0$ 解不唯一；

(C) 如 $Ax = 0$ 有无穷多个解, 则 $Ax = b$ 也有无穷多个解；

(D) 如 $Ax = b$ 有无穷多个解, 则 $Ax = 0$ 也有无穷多个解;

(13) 设三次独立试验中, 事件 A 出现的概率相等, 若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$,

则事件 A 在一次试验中出现的概率为 ()

- (A) $\frac{1}{3}$; (B) $\frac{1}{27}$; (C) $\frac{2}{9}$; (D) 无法确定

(14) 已知 X_1, X_2, X_3 独立且服从 $N(0, \sigma^2)$, $Z = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{X_1 + X_2 + X_3}{|X_3 - X_2|}$, 则 ()

- (A) $Z \sim N(0, \sigma^2)$ (B) $Z \sim \chi^2(3)$ (C) $Z \sim t(2)$ (D) $Z \sim t(1)$

三、解答题(本题 9 小题, 满分 94 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$ 确定, 求 y_x'' .

(16)(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上有二阶导数, 且 $f(1) = f(2) = 0$, $F(x) = (x-1)^2 f(x)$, 证明:

$\exists x_0 \in (1, 2)$ 使得 $F''(x_0) = 0$.

(17)(本题满分 11 分)

设极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \sqrt{\cos 2x}}{x^k} = \alpha \neq 0$, 试求常数 k 与 α .

(18)(本题满分 11 分)

高温物体冷却遵循所谓冷却定理: “物体冷却的速度与该物体和周围的温差成正比。”设

某物体开始温度为 $100^\circ C$, 放在 $20^\circ C$ 的空气中, 头 600s 下降 $60^\circ C$, 问从 $100^\circ C$ 下降到

$25^\circ C$, 需用多少时间?

(19)(本题满分 11 分)

求 $2xdy - ydx = 2y^2dy$ 的通解。

(20)(本题满分 11 分)

已知对于 n 阶方阵 A , 存在自然数 k , 使得 $A^k = 0$, 试证明矩阵 $I - A$ 可逆, 并写出其矩阵的表达式.

(21)(本题满分 9 分)

已知下列非齐次线性方程组

$$() \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \quad () \begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11 \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1 \end{cases}$$

(1) 求解方程组 (), 用其导出组的基础解系表示通解.

(2) 当方程组 () 中的参数 m, n, t 为何值时, 方程组 () 和 () 同解.

(22)(本题满分 10 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} Ae^{-Ay}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(1) 确定常数 A ;

(2) 求随机变量 X 的密度 $f_X(x)$;

(3) 求概率 $P(X + Y \leq 1)$.

(4)

(23)(本题满分 10 分)

已知连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2x-1}$, $-\infty < x < +\infty$. 求 EX 与

DX .