清华大学数学系教授　刘坤林 俞正光 谭泽光 葛余博

数学(三)试题

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 设 $0<x<\frac{\pi}{2}$，取 $a_1=\sin x, a_n=\sin a_{n-1}(n=2,3,\cdots)$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$______.

(2) 设 $\int xf(x)dx=\arcsin x+c$, 则 $\int \frac{1}{f(x)}dx=$______。

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛性结论是______。

(4) 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, 而 $n\ge 2$ 为正整数，则 $A^n-2A^{n-1}=$______.

(5) 设 X 是一随机变量，其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x\le 0,\\ 1-x, & 0<x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 则 $DX=$______。

(6) 设 $X_1,\cdots X_n$ 是从区间 $[0,\theta]$ 上均匀分布的总体中抽出的样本，θ 的矩估计为______。

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则下列正确选项为______.

(A) $\exists$M>0及 x^0 之去心邻域 $N^*(x_0,\delta)$, 使当 $x\in N^*$ 时，$f(x)>M$;

(B) $\exists$M>0及 x^0 之去心邻域 $N^*(x_0,\delta)$, 使当 $x\in N^*$ 时，$f(x)<M$;

(C) $\exists$M>0及 x^0 之邻域 $N^*(x_0,\delta)$, 使当 $x\in N$ 时, $|f(x)|<M$;

(D) $\exists$M>0, $|f(x)|<M$.

(8) 设 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义，则下列选项中，与 $f'(x_0)$ 存在不等价的是______。

(A) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x_0+kx)-f(x_0)}{x}$存在（$k\neq0$或1）；

(B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x_0+\alpha(x))-f(x_0)}{\alpha(x)}$,其中$\alpha(x)>0$,且$\lim\limits_{x\to0}\alpha(x)=0$;

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[f\left(x_0-\dfrac{1}{x}\right)-f(x_0)\right]$存在；

(D) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x_0-x)-f(x_0)}{\sin x}$存在

（9）设$\delta>0$, $f(x)$在区间$(-\delta,\delta)$内有定义，若当$x\in(-\delta,\delta)$时，恒有$|f(x)|\le x^2$,

则$x=0$必是$f(x)$的________

(A)　间断点；　　(B)　连续而不可导的点；

(C)　可导的点，且$f'(0)=0$；　　(D)　可导的点，且$f'(0)\neq0$.

(10) 设$\delta>0$，$f(x)$在区间$(-\delta,\ \delta)$内恒有$f''(x)>0$，且$|f(x)|\le x^2$，记$I=\int_{-\delta}^{\delta}f(x)dx$，

则必有（　　）

(A) $I=0$.　(B)　$I>0$.　(C)　$I<0$.　(D) 不确定.

(11) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-a)^n}{n^2}$在$x<1$处发散,而在$x=2$点收敛,则参数$a$的取值范围为______。

(A) $1\le a\le3$;　　(B) $2\le a\le3$;

(C) $2<a\le3$;　　(D) $2\le a<3$.

（12）设 A, B 为 n 阶方阵，满足等式 AB=0, 则必有（　　）

(A)　$A=0$或$B=0$;　　(B)　$A+B=0$;

(C)　$|A|=0$或$|B|=0$;　　(D)　$|A|+|B|=0$.

（13）已知$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0,a_1)^T$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,0,a_2)^T$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,2,3,a_3)^T$，$\boldsymbol{\beta}_4=(1,0,3,a_4)^T$，

对于任意实数a_1,a_2,a_3,a_4，有_________成立.

(A) β_1,β_2,β_3 必线性相关；

(B) β_1,β_2,β_3 必线无关；

(C) $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 必线性相关；

(D) $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 必线性无关；

(14) 设总体X二阶矩存在，X_1，X_2，…，X_n是其简单样本，$n>1$，样本均值为 $\overline{X}$．则对X期望估计时，（　　）．

(A) $(X_1+\overline{X})/2$ 不是无偏，但它比 $\overline{X}$ 更有效．

(B) $(X_1+\overline{X})/2$ 比 $\overline{X}$ 更有效．

(C) 利用切贝雪夫定理，$(X_1+\overline{X})/2$ 以概率收敛于 0，因此是一致估计．

(D) $\overline{X}$ 比 $(X_1+\overline{X})/2$ 更有效．

三、 解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

(15)（本题满分 11 分）

设 $a_n>0,\{a_n\}$ 为单调减序列，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，试证 $\lim_{n\to\infty}na_n=0.$

(16)（本题满分 11 分）

计算 $I=\int_{1/2}^{3/2}\frac{(1-x)\arcsin(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}dx.$。

(17)（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上有二阶导数，且 $f(1)=f(2)=0$，$F(x)=(x-1)^2f(x)$，证明：$\exists x_0\in(1,2)$ 使得 $F''(x_0)=0$.

(18)（本题满分 12 分）

将一半径为 R 的半圆球压入水中，使球体刚好与水平面相切，求克服浮力做的功（设水密度为 1）．

(19)（本题满分 11 分）

求 $y''+4y'+4y=e^{ax}$ 的通解。

(20)（本题满分 9 分）

已知下列非齐次线性方程组

（Ⅰ）$\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6 \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3=3 \end{cases}$　（Ⅱ）$\begin{cases} x_1+mx_2-x_3-x_4=-5 \\ nx_2-x_3-2x_4=-11 \\ x_3-2x_4=-t+1 \end{cases}$

(1) 求解方程组（Ⅰ），用其导出组的基础解系表示通解.

(2) 当方程组（Ⅱ）中的参数 m,n,t 为何值时，方程组（Ⅰ）和（Ⅱ）同解。

(21)（本题满分 10 分）

若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵，λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值，$\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量.求证 λ 只能是 ±1，并且 $\boldsymbol{x}$ 也是 $\boldsymbol{A}^T$ 的特征向量.

(22)（本题满分 9 分）

某工厂采用新法处理废水，对处理后的水测量所含某种有毒物质的浓度，得到 10 个数据（单位：mg/L）：22，14，17，13，21，16，15，16，19，18.。而以往用老方法处理废水后，该种有毒物质的平均浓度为 19.问新方法是否比老法效果好？假设检验水平 $\alpha=0.05$, 有毒物质浓度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

(23)（本题满分 9 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-Ay}, & 0<x<y, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(1)　确定常数 A；

(2)　求随机变量 X 的密度 $f_X(x)$；

(3)　求概率 $P(X+Y\le1)$.