

## 数学(二)试题答案及解题分析

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分,把答案填在题中横线上)

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \sin x)^{\frac{1}{3x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

答案为:  $e^{-\frac{2}{3}}$ .

(2) 函数  $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$  的上凸区间为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

答案为:  $(0, 1)$ .

(3) 设  $f(x)$  为连续奇函数, 且  $\int_0^1 f(t) dt = a$ , 则  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) f(-\sin^2 x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

答案为:  $-a$ .

(4) 已知  $f(x, y)$  二阶连续可导, 若  $z = f(x, v)$ ,  $v = xy$ , 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

答案为:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial v} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ .

(5) 若某二阶线性非齐次微分方程的两个解为  $3 + x^2$ ,  $e^{-x} + 3 + x^2$ , 且相应齐次方程的一个解为  $x$ , 则该非齐次方程的通解为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

答案为:  $3 + x^2 + C_1 x + C_2 e^{-x}$ .

(6) 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  的一个非零特征值是 \_\_\_\_\_.

答案为：10.

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 设  $f(x)$  在  $x=0$  某领域内连续，且  $f'(0)=0$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$ ，则 ( )。

- (A)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极大值
- (B)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极小值
- (C)  $(0, f(0))$  是  $f(x)$  的拐点
- (D)  $x=0$  不是  $f(x)$  的极值点， $(0, f(0))$  也不是  $f(x)$  的拐点

答案为：(B)

(8) 设  $y = e^{\sin^2 x}$ ，则  $dy = ( )$

- (A)  $e^x d(\sin^2 x)$
- (B)  $e^{\sin^2 x} d(\sin^2 x)$
- (C)  $e^{\sin^2 x} \sin 2x d(\sin x)$
- (D)  $e^{\sin^2 x} d(\sin x)$

答案为：(B)

(9) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，则  $\exists \delta > 0$ ，使( )

- (A) 对  $A=0$ ，当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时， $f(x) = 0$

(B) 对  $A \neq 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,  $f(x) \neq 0$

(C) 对  $A = 0$ ,  $f(x_0) = 0$

(D) 对  $A \neq 0$ ,  $f(x_0) \neq 0$

答案为(B)

(10) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1-\cos \frac{1}{n}}{n}} - 1}{\tan(n^{-k}\pi)} = a \neq 0$ , 则\_\_\_\_\_

(A)  $k = 2$  且  $a = \frac{1}{2\pi}$

(B)  $k = -2$  且  $a = \frac{1}{2\pi}$

(C)  $k = 2$  且  $a = -\frac{1}{2\pi}$

(D)  $k = -2$  且  $a = -\frac{1}{2\pi}$

答案为：(A)

(11) 微分方程  $y'' + 2y' + y = 1 + e^{-x} + e^x$  必有如下形式之解 ( )

(A)  $Y = A + Be^{-x} + Ce^x$

(B)  $Y = A + Bxe^{-x} + Ce^x$

(C)  $Y = A + Be^{-x} + Dxe^x$

(D)  $Y = 1 + Bx^2e^{-x} + Ce^x$

其中  $A, B, C, D$  为待定常数.

答案为：(D)

(12)  $\int_{\frac{1}{4}}^4 \frac{|\ln x| dx}{\sqrt{x}} = ( )$

(A)  $6 \ln 2 - 2$

(B)  $6 \ln 2 + 2$

(C)  $2 - 6 \ln 2$

(D)  $6 \ln \sqrt{2} - 2$

答案为：(A)

(13) 设  $A \in M_{mn}$ , 已知  $AX = 0$  只有零解, 则以下错误的结论是( )

- (A)  $m \geq n$                       (B)  $AX = b$  ( $b \in R^m$ ) 必有唯一解  
 (C)  $r(A \text{ 的列组}) = n$               (D)  $r(A \text{ 的行组}) = n$

答案为：(B)

(14) 设  $A \in M_n$ , 已知  $A^2 + 2A - 2E = 0$ , 则  $(A + E)^{-1} =$  (      )

- (A)  $3E - A$               (B)  $3E + A$               (C)  $\frac{1}{3}(A + E)$               (D)  $\frac{2A + E}{A - E}$

答案为：(C)

**三、解答题(本题 9 小题, 满分 94 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)**

(15)(本题满分 10 分)

计算不定积分  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{2x-4}}$ .

**[解]** (方法 1)  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{2x-4}} = -\int \frac{d(\frac{1}{x})}{\sqrt{2x-4}} = -\frac{1}{x\sqrt{2x-4}} - \int \frac{1}{x\sqrt{(2x-4)^3}} dx,$

对第二项取变换  $\sqrt{2x-4} = t$ , 则  $x = \frac{t^2+4}{2}$ ,  $dx = t dt$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{(2x-4)^3}} dx &= \int \frac{2tdt}{(t^2+4)t^3} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t^2+4-t^2}{(t^2+4)t^2} dt = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+4} \right) dt \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} \right) + C = -\frac{1}{2\sqrt{2x-4}} - \frac{1}{4} \arctan \frac{\sqrt{2x-4}}{2} + C, \end{aligned}$$

因此  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{2x-4}} = \frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + \frac{1}{4} \arctan \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.$

(方法 2) 令  $\sqrt{2x-4} = t$ , 则  $x = \frac{t^2+4}{2}$ ,  $dx = t dt$ , 于是

$$I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{2x-4}} \int \frac{4dt}{(t^2+4)^2}, \text{ 再令 } t = 2 \tan u, \text{ 则 } dt = 2 \sec^2 u du$$

$$I = 4 \int \frac{2 \sec^2 u du}{4^2 \cdot \sec^4 u} = \frac{1}{2} \int \cos^2 u du = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2u) du = \frac{1}{4} u + \frac{1}{8} \sin 2u + C$$

$$= \frac{1}{4} \arctan \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{t}{\sqrt{4+t^2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{4+t^2}} = \frac{1}{4} \arctan \frac{\sqrt{2x-4}}{2} + \frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + C.$$

$$\text{因此 } \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{2x-4}} = \frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + \frac{1}{4} \arctan \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.$$

(16)(本题满分12分)

设  $f(x)$  在  $x=0$  某邻域内可导, 且  $f(0)=1, f'(0)=2$ , 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^{\frac{2x}{1-\cos x}}$

**【解】**  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{2x}{1-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + f(x) - 1]^{\frac{2x}{1-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1 + f(x) - 1)^{\frac{1}{f(x)-1}}]^{\frac{2[f(x)-1]x}{1-\cos x}}$ , 而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2[f(x)-1]x}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2[f(x)-1]x}{\frac{1}{2}x^2} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 4f'(0) = 8$$

于是  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{2x}{1-\cos x}} = e^8$ .

注: 若由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2[f(x)-1]x}{\frac{1}{2}x^2} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{1} = 8$  得出  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{x}{1-\cos x}} = e^8$ , 应

扣分.

(17)(本题满分12分)

假设区域  $D$  由曲线  $y = px^3 (y > 0, P > 0)$  及其过点  $(1, p)$  的切线与  $x$  轴围成, 设此区域的形心为  $(X, Y)$ , (1) 求  $X$  的值; (2) 求  $p$  的值, 使区域  $D$  绕  $y$  轴旋转一周而生成的旋转

体体积为  $V_y = \frac{7}{135} \pi$ .

**【解】**  $y'|_{x=1} = 3px^2|_{x=1} = 3p$ , 切线为  $y = p + 3p(x-1)$ , 与轴交点为  $(\frac{2}{3}, 0)$ ,

区域  $D$  的面积为  $A = \int_0^1 px^3 dx - \frac{1}{6}p = \frac{1}{12}p$ , 对轴的静力矩为 (假设面密度为 1)

$$M_y = \int_0^1 px^3 \cdot x dx - \int_{2/3}^1 [p + 3p(x-1)]x dx$$

$$= \frac{1}{5}p - \int_{2/3}^1 (3px^2 - 2px) dx = \frac{1}{5}p - (1 - \frac{8}{27} - 1 + \frac{4}{9})p = \frac{7}{135}p$$

于是  $X = \frac{84}{135} = \frac{28}{45}$ 。

$$V_y = 2\pi XA = 2\pi \frac{84}{135} \cdot \frac{1}{12} p = \frac{14}{135}\pi p = \frac{7}{135}\pi, \quad \text{解得 } p = \frac{1}{2}。$$

(18)(本题满分 11 分)

设  $f'(x)$  为  $([0, +\infty)$  上的单调增函数,  $f(0) = 0$ , 试讨论函数  $\frac{f(x)}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上的增减性。

[证] 令  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ , 则  $g'(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}(xf'(x) - xf'(\xi))$ , 其中  $0 < \xi < x$ ,

因为  $f'(x)$  为  $([0, +\infty)$  上的单调增函数, 于是  $f'(x) > f'(\xi)$ ,  $g'(x) > 0$ , 所以

$g(x) = \frac{f(x)}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上单调增加。

(19)(本题满分 11 分)

设常数  $a > 1$ ,  $x_1 = a$ ,  $x_n = a^{x_{n-1}}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 求使序列  $\{x_n\}$  收敛的常数  $a$  的取值范围。

[解] 若序列  $\{x_n\}$  收敛, 则应有  $x = a^x$ , 设  $f(x) = a^x - x$ , 问题转化为求使  $f(x)$  有零点的

常数  $a$  的取值范围。

$f(x)$  有零点即  $y = x$  与  $y = a^x$  有交点, 则二曲线至少相切。

先求切点, 即求解

$$\begin{cases} f'(x) = a^x \ln a - 1 = 0 \\ a^x - x = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x \ln a - 1 = 0 \\ a^x \ln a - 1 = 0 \end{cases}$$

$$x_0 = \frac{1}{\ln a} = \frac{\ln \frac{1}{\ln a}}{\ln a} \Rightarrow a = e^{\frac{1}{e}}, \quad \text{切点为 } x_0 = e。$$

由指数函数性质,  $a$  变小时  $y = a^x$  的曲线会趋于平缓,

这将导致  $y = a^x$  与  $y = x$  由相切变为相交, 因此得知使  $f(x)$

有零点的常数  $a$  的取值范围应为  $1 < a \leq e^{\frac{1}{e}}$ 。

再证当  $1 < a \leq e^{\frac{1}{e}}$  时序列  $\{x_n\}$  收敛。

$$x_1 = a > 1, x_2 = a^{x_1} = a^a > a = x_1,$$

假设  $x_n > x_{n-1}$ , 则  $x_{n+1} = a^{x_n} > a^{x_{n-1}} = x_n$ ,

因此  $\{x_n\}$  为单调增序列。

另外,  $x_1 = a = e^{\frac{1}{e}} < e, x_2 = a^{x_1} < a^e \leq e$ ,

假设  $x_n < e$ , 则  $x_{n+1} = a^{x_n} < a^e = e$ ,

因此  $\{x_n\}$  有上界, 所以  $\{x_n\}$  收敛。

(20)(本题满分 10 分)

设有半径为  $R$ , 质量为  $m$  的圆柱形浮筒垂直放置水中, 在重力和浮力的作用下处于平衡状态(浮筒密度小于 1, 水足够深), 重力加速度为  $g$ , 现把浮筒向下压至顶部与水平面重合后突然放手, 已知阻力与浮筒运动速度成正比, 比例常数为  $2k > 0$ 。

(1) 列出浮筒运动满足的微分方程;

(2)  $k$  满足什么条件时浮筒在水中作上下衰减振动, 并求出此时方程的通解。

**[解]** 取平衡位置为  $x$  坐标轴原点, 则位移  $x$  与浮力/重力合力(恢复力)方向相反, 由牛顿定律列出方程

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\pi R^2 g x - 2k \frac{dx}{dt}, \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2k \frac{dx}{dt} + \pi R^2 g x = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4\pi R^2 mg}}{2m} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - \pi R^2 mg}}{m}$$

当  $k < \sqrt{\pi mg} R$  时方程有衰减震荡解, 一般解为

$$x(t) = e^{-\frac{k}{m}t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}), \quad \text{其中 } \omega = \frac{\sqrt{\pi mg R^2 - k^2}}{m}, \text{ 或}$$

$$x(t) = e^{-\frac{k}{m}t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty)$$

(21)(本题满分 10 分)

设  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq a, |y| \leq b, a > 0, b > 0\}$ ,  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 在  $D$  内可微, 且满足方程  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = kf(x, y)$ , (常数  $k \neq 0$ ), 若在  $D$  的边界上  $f(x, y) = 0$ , 试证  $f(x, y)$  在  $D$  上恒为零。

**[证]** 设  $f(x, y)$  在  $D$  上不恒为零。因为函数  $f(x, y)$  在有界闭域  $D$  上连续, 所以  $f(x, y)$  在  $D$  上存在最大值  $M$  和最小值  $m$ , 且最大值  $M$  和最小值  $m$  不能同时为零。不妨设最小值  $m \neq 0$ , 因为在  $D$  的边界上  $f(x, y) = 0$ , 于是必有  $D$  内的点  $(x_0, y_0)$  使得  $f(x_0, y_0) = m \neq 0$ , 由  $f(x, y)$  在  $D$  内可微, 点  $(x_0, y_0)$  必为极值点 (驻点)。所以

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0, \text{ 这与 } \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = kf(x_0, y_0) \neq 0,$$

矛盾! 因此  $f(x, y)$  在  $D$  上恒为零。

(22) (本题满分 9 分)

已知线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 4 \\ -x_1 + ax_2 + x_3 = a^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$
 有无穷多解, 求  $a$  的取值并求通解。

**[解]**  $(A \ b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ -1 & a & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & a-2 & 8 \\ 0 & 0 & \frac{(a+1)(4-a)}{2} & a(a-4) \end{pmatrix}$

$a = 4$  时,  $r(A \ b) = r(A) = 2$  有无穷解, 此时  $(A \ b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$X = k(-3 \ -1 \ 1)^T + (0 \ 4 \ 0)^T \quad k \in \mathbb{R}$

(23) (本题满分 9 分)

已知  $X = (1 \ 1 \ -1)^T$  是  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$  的一个特征向量,

(1) 确定  $a, b$  及特征向量  $X$  所对应的特征值; (2)  $A$  能否相似于对角阵? 为什么?

**[解]** (1) 由  $(\lambda I - A)X = 0$ , 即 
$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda - a & -3 \\ 1 & -b & \lambda + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

得 
$$\begin{cases} \lambda - 2 + 1 + 2 = 0 \\ -5 + \lambda - a + 3 = 0 \\ 1 - b - \lambda - 2 = 0 \end{cases}, \text{解得 } a = -3, b = 0, \lambda = -1.$$

(2)  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^3 = 0$ ,  $\lambda = -1$  是  $A$  的

三重特征值, 而  $r(-I - A) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ ,  $\therefore \lambda = -1$  对应的线性无关的特征向

量只有一个,  $\therefore A$  不能对角化。