清华大学数学系教授　刘坤林　俞正光　谭泽光　葛余博

# 数学(三)试题答案及解题分析

## 一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

（1）已知 $f(x,y)$ 二阶连续可导，若 $z=f(x,v)$，$v=xy$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$________________.

答案为：$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial v}+y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ .

（2）计算广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}dx=$________.

答案为：1

（3）$\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{\frac{1}{3x}}=$______________.

答案为：$e^{-\frac{2}{3}}$.

（4）矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}$ 的一个非零特征值是 ________.

答案为：10.

（5）设随机变量 $X$，$Y$ 相互独立，且 $X$ 服从$[0,2]$上的均匀分布，$Y$ 服从参数为 2 的指数分布，

则 $E(XY)=$_______　；$D(X-2Y)=$________。

答案为：$\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3}$.

（6）袋中有 $m$ 个白球，$n$ 个红球，从中依次随机地取出 $k$ 个球（$1\le k\le m+n$，取后不放回），则第 $k$ 个球是白球的概率为________________。

答案为：$\dfrac{m}{m+n}$ .

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 若 $f(x)$为$(-\infty,+\infty)$内的二阶可导的奇函数，在$(-\infty,0)$内 $f'(x)>0$，且 $f''(x)<0$，则在$(0,+\infty)$内必有(　　　　)。

(A)　$f'(x)>0,$　且存在常数$k>0$使得$y=f(x)$与$y=kx$有唯一交点；

(B)　$f'(x)>0,$　且存在常数$k>0$使得$y=f(x)$与$y=kx$有两个交点；

(C)　$f'(x)<0,\quad f''(x)<0$；

(D)　$f'(x)<0,\quad f''(x)>0$。

答案为：(A)

(8) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某领域内连续，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则（　　　）。

(A)　$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B)　$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C)　$(0,f(0))$ 是 $f(x)$ 的拐点

(D)　$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,f(0))$ 也不是 $f(x)$ 的拐点

答案为：(B)

(9) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{1-\cos\frac{1}{n}}-1}{\tan(n^{-k}\pi)}=a\neq 0$，则(　　　).

(A)　$k=2$ 且 $a=\dfrac{1}{2\pi}$　　　　(B)　$k=-2$ 且 $a=\dfrac{1}{2\pi}$

(C)　$k=2$ 且 $a=-\dfrac{1}{2\pi}$　　　　(D)　$k=-2$ 且 $a=-\dfrac{1}{2\pi}$

答案为：(A)

(10) 若$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$在$\boldsymbol{x=2}$点收敛,则$\boldsymbol{a}$的取值范围是(　　).

(A) $1\le a\le 3$;　(B) $1<a\le 3$;　(C) $2<a\le 3$;　(D) $2\le a<3$.

答案为：(B)

(11) 设二阶线性齐次常系数微分方程$y''+by'+c^2y=0$ ( $c,b$为常数)的每一个解$y(x)$在区间$0<x<+\infty$ 有界,则实数$c$,$b$的取值范围是 (　　).

(A) $b\ge 0, c\ne 0$　　(B) $b\le 0, b^2\ge 4c^2$

(C) $b\ge 0$ , $b^2+c^2\ne 0$　　(D) $b^2\ge 4c^2$

答案为：(C)

(12) 设$A,B$为$n$阶可逆矩阵，且$(AB)^2=E$，其中$E$是$n$阶单位矩阵，则以下选项中错误的是 (　　).

(A) $B^{-1}=A$　(B) $B^{-1}A^{-1}=AB$　(C) $(BA)^2=E$　(D) $A^{-1}=BAB$

答案为：(A)

(13) 设$A\in M_{mn}$，已知$AX=0$只有零解，则以下错误的结论是(　　)

(A) $m\ge n$　　(B) $AX=b\ (b\in R^m)$必有唯一解

(C) $r(A\text{的列组})=n$　　(D) $r(A\text{的行组})=n$

答案为：(B)

(14) 若$(X,Y)\sim N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0)$，令$U=\frac{1}{2}(X+Y),\ V=X-\frac{1}{2}Y$, 则下列结论中不正确的为 (　　)。

(A) $U,V$均为正态分布。　　(B) $U,V$同分布。

(C) $D(V)=\frac{5}{4}\sigma^2$。　　(D) $U,V$不独立。

答案为：(D)

三、　解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(t-[t])dt}{x}$，其中$[t]$表示不超过$t$的最大整数。

[解] 考虑充分大的 $x$： $n<x<n+1$ 时有

$$\int_0^x (t-[t])dt=\int_0^1 (t-[t])dt+\int_1^2 (t-[t])dt+\cdots\int_{n-1}^n (t-[t])dt+\int_n^x (t-[t])dt$$

$$=\int_n^x (t-[t])dt+\sum_{k=1}^n\int_{k-1}^k (t-[t])dt$$

令 $u=t-(k+1)$， $du=dt$，则有

$$\int_{k-1}^k (t-[t])dt=\int_0^1 [u-k+1-(k-1)]du=\int_0^1 udu=\frac{1}{2},$$

而 $\int_n^x (t-[t])dt=\int_0^{x-n} udu<\int_0^1 udu=\frac{1}{2}$，因此

$\frac{n}{2}<\int_0^x (t-[t])dt<\frac{1}{2}+\frac{n}{2}$，于是 $\frac{n}{2(n+1)}<\frac{\int_0^x (t-[t])dt}{x}<\frac{1}{n}(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})$，

由夹逼定理得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x (t-[t])dt}{x}=\frac{1}{2}$。

（16）（本题满分 12 分）

若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续导数，证明对任意的 $a<c<b$,都存在 $\xi\in(a,b)$,使

得 $$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

[证]　（泰勒公式，介值定理，或罗尔定理）

法一　因为

$$f(a)=f(c)+f'(c)(a-c)+\frac{1}{2}f''(x_1)(a-c)^2,$$

$$f(b)=f(c)+f'(c)(b-c)+\frac{1}{2}f''(x_2)(b-c)^2.$$

所以 $\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$

$$= f(c)\left(\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}\right)$$

$$+ f'(c)\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c-a}{b-a}f''(x_1)+\frac{b-c}{b-a}f''(x_2)\right)$$

$$=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

注　用到了二阶导函数 $f''(x)$ 的介值性质.

法二　记 $\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{1}{2}K$,

则 $f(a)(b-c)+f(b)(c-a)+f(c)(a-b)-\dfrac{1}{2}K(a-b)(b-c)(a-c)=0$.

令 $F(x)=f(a)(x-c)+f(x)(c-a)+f(c)(a-x)-\dfrac{1}{2}K(a-x)(x-c)(a-c)$,

则　$F(a)=F(b)=F(c)=0$,

所以,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F''(\xi)=0$,即 $f''(\xi)(c-a)+K(a-c)=0$.

故　$K=f''(\xi)$。

(17)(本题满分 12 分)

将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $x=1$ 处展开为幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2^n}$ 的和。

[解]

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=-\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$=-\left(\frac{1}{1+(x-1)}\right)'$$

$$=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n\right)'$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(x-1)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n,$$

展开范围是$(0,2)$。

因为 $f(\frac{3}{2})=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{1}{2^n}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{1}{2^{n+1}}$，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}f(\frac{3}{2})=\frac{2}{9}$。

（18）（本题满分 12 分）

某公司的一个研发部门研发甲已两类高科技产品，甲类产品可有 $x$ 个品种选择，已类产品可有 $y$ 个品种选择，限于研发能力，甲已两类产品的品种需满足 $x+y\le 9$，若每季度研发甲已两类产品对该公司产生的效益函数为 $f(x,y)=4+2x+2y-x^2-y^2$（百万元），问：

该研发部门每个季度应如何制定研发策略使其效益最大？该研发部门每个季度潜在的最大风险（亏损最大）是什么？

[解] 求解 $f(x,y)=4+2x+2y-x^2-y^2$

在闭区域 $D=\{(x,y)\in R^2\ |0\le x\le 9,\ 0\le y\le 9-x\}$上的最大值最小值问题。

（1） $f_x'=2-2x$， $f_y'=2-2y$，驻点为 $p_0(1,1)$， $x_0=1$， $y_0=1$， $f(1,1)=6$。

（2）在边界 $y=0, 0\le x\le 9$ 上， $f(x,y)=4+2x-x^2$，

令 $f_x'=2-2x=0$ 得 $x_0=1$， $f(1,0)=5$。

（3）由对称性，在边界 $x=0, 0\le y\le 9$ 上 $f(0,1)=5$。

（4）在边界 $0\le x\le 9, y=9-x$ 上，

$$f(x,y)=4+2x+2(9-x)-x^2-(9-x)^2=-59+18x-2x^2,$$

令 $f'(x,9-x)=18-4x=0$ 得到 $x_2=\frac{9}{2}=y_2$， $f(\frac{9}{2},\frac{9}{2})=-\frac{37}{2}$，

（5）考虑端点： $f(0,0)=4$， $f(0,9)=f(9,0)=-59$。

答案： $\max\limits_{(x,y)\in D}f(x,y)=6$ （百万元）， $\min\limits_{(x,y)\in D}f(x,y)=-59$ （百万元）。

最佳策略是每季度甲已两类产品各研发一个品种，获利为 600 万元。最大的风险是单一产品研发，导致亏损 5900 万元。

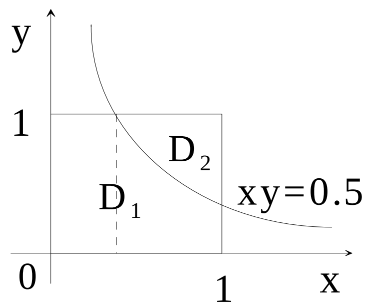
（19）（本题满分 12 分）

计算二重积分 $\int_0^1\int_0^1 |2xy-1|\,dxdy$

[解] $I=\int_0^1\int_0^1|2xy-1|\,dxdy=\iint\limits_{D_1}(1-2xy)d\sigma+\iint\limits_{D_2}(2xy-1)d\sigma$

$=\int_0^1\int_0^1(1-2xy)d\sigma+2\iint\limits_{D_2}(2xy-1)d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^1(1-2xy)dy+2\int_{\frac{1}{2}}^1\int_{\frac{1}{2x}}^1(2xy-1)dy$

$=\frac{1}{4}(2\ln 2+1)$




（20）（本题满分 8 分）

设 $A$ 是 3 阶方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是三个不同的特征值，对应的特征向量是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，证明：$\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关。

[证] 考察 $k_1\beta+k_2A\beta+k_3A^2\beta=0$，已知条件则有

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+k_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3)+k_3(\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3)=0,$$

再由 $\alpha_1,\alpha_2\alpha_3$ 线性无关既有方程组

$\begin{cases}k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2=0\\k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2=0\\k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2=0\end{cases}$，其系数行列式为 $(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\neq 0$

因此 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关。

（21）（本题满分 10 分）

设 3 元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$，$(a>0)$．已知 1 是二次型矩阵 $A$ 的一个特征值，(1) 求 $a$ ；(2) 求在条件 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 下，$f(x_1,x_2,x_3)$ 的最大值与最大值点．

**解**　(1) $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$，$|E-A|=\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&-2&-a\\0&-a&-2\end{vmatrix}=0$，解得 $a=2$．

(2) 显然，2 也是 $A$ 的一个特征值，由特征值的和等于矩阵的迹，$1+2+\lambda=2+3+3$，解得 $\lambda=5$，

属于 1 的特征向量：$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}x=0$，$\alpha_1=(0,1,-1)^T$ ；

属于 2 的特征向量：$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}x=0$，$\alpha_2=(1,0,0)^T$ ；

属于 5 的特征向量：$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}x=0$，$\alpha_3=(0,1,1)^T$．

由于不同特征值的特征向量是正交的，再单位化：

$\gamma_1=\left(0,\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)^T$，$\gamma_2=(1,0,0)^T$，$\gamma_3=\left(0,\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)^T$．

令 $Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$，$Q$ 是正交矩阵，则有 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}$．

作正交线性替换 $x=Qy$，有

$$f=x^TAx=y^TQ^TAQy=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2\le 5\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)=5y^Ty\,.$$

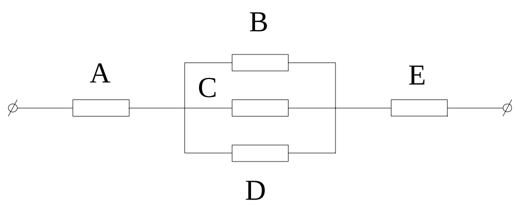
又 $x^Tx=y^TQ^TQY=y^Ty=1$，于是 $f\le 5$，$f$ 的最大值为 5．

当 $y=(0,0,1)^T$，由 $x=Qy=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

即 $x=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ 时，$f$ 取得最大值 5.

(22)（本题满分 9 分）

设一系统由五个元件组成（如图），各自独立工作。元件 A，E 正常工作的概率为 $q$，元件 B，C，D 正常工作的概率为 $p$，




求：(1) 系统能正常工作的概率；

(2) 已知系统正在正常工作，问此时 B，C，D 中仅有一个在正常工作的概率。

[解] 设事件 A、B、C、D、E 分别为五个元件各自正常工作，事件 F 为系统正常工作，则

(1) $P(F)=P(A\cap E\cap(B\cup C\cup D))=P(A)P(E)P(B\cup C\cup D)$

$=P(A)P(E)(1-P(\bar{B}\bar{C}\bar{D}))\quad=q^2(1-(1-p)^3)$

(2) $P(B,C,D\text{中恰有一个正常}|F)\quad=\dfrac{P(F\cap(B\bar{C}\bar{D}\cup\bar{B}C\bar{D}\cup\bar{B}\bar{C}D))}{P(F)}$

$=\dfrac{3p(1-p)^2q^2}{q^2(1-(1-p)^3)}\quad=\dfrac{3p(1-p)^2}{1-(1-p)^3}$

(23)（本题满分 9 分）

设总体 $X$ 的 $pdf$ 为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(x-\mu)}, & \text{当}x\ge\mu,\\ 0, & \text{当}x<\mu.\end{cases}$$

其中λ(>0)和 $\mu$ 都是参数. 又若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为该总体的简单样本，而 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为其样本观察值.

(1) 设λ已知，求 $\mu$ 的极大似然估计 $\hat{\mu}_L$ .

(2) 设 $\mu$ 已知，求λ的矩估计 $\hat{\lambda}_M$ .

［解］1) 似然函数

$$L(\lambda,\mu)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i)=\begin{cases} n\ln\lambda-\lambda(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu), & \text{当}\mu\le x_i,\ i=1,2,\ldots,n \\ -\infty, & \text{其它} \end{cases}.$$

令 $x_{(1)}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。注意 λ和 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 已知，作为 $\mu$ 的函数，

L 在（－∞，$x_{(1)}$]为升函数，因此 L 在 $x_{(1)}$ 取得极大值。故 $\mu$ 的极大似然估计

$\hat{\mu}_L = X_{(1)} := \min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

2) 令 $Y$＝$X$－$\mu$。易知 $Y$～ Ex(λ)。故 EY＝1/λ。，从而 EX＝1/λ＋$\mu$。

（注：也可直接由定义，计算如下：

$$EX=\int_{\mu}^{\infty}x\lambda\exp\{-\lambda(x-\mu)\}dx=\int_{0}^{\infty}(y+\mu)\lambda\exp\{-\lambda y\}dy=1/\lambda+\mu.)$$

由矩估计法，注意 $\mu$ 已知，故 λ的矩估计 $\hat{\lambda}_M=1/(\overline{X}-\mu)$。