清华大学数学系教授　刘坤林 俞正光 谭泽光 葛余博

数学(四)试题答案及解题分析

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{\frac{1}{3x}} =$____________.

答案为：$e^{-\frac{2}{3}}$.

（2）定积分 $\int_{-2}^{1}[x\sqrt{|x|}+\sqrt{8+2x-x^2}]dx =$______________.

答案为：$\frac{9}{4}\pi-\frac{2}{5}(4\sqrt{2}-1)$.

（3）设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=\cos t \end{cases}$ 确定，则 $\frac{dy}{dx}=$_________；$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=$________。

答案为：$\frac{-\sin t}{2t}$，$\frac{2}{\pi^3}$，

注：$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dx}(\frac{-\sin t}{2t})=\frac{-2t\cos t+2\sin t}{4t^2\cdot 2t}=\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$.

（4）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，$I$ 是单位矩阵，$|(4I-A)(4I-A^T)|=$ ______ 。

答案为：324.

（5）齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$ 的通解是______________。

答案为：$X=k_1(-2\quad 1\quad 0\quad 0)^T+k_2(1\quad 0\quad 0\quad 1)^T\quad (k_1k_2\in R)$.

（6）设 $P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(A^c\cup B^c)=$_______.

答案为：0.6.

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

(7) 设 $y=e^{\sin^2 x}$，则 $dy=$(　　　)

(A) $e^{x}d(\sin^2 x)$　　(B) $e^{\sin^2 x}d(\sin^2 x)$

(C) $e^{\sin^2 x}\sin 2xd(\sin x)$　　(D) $e^{\sin^2 x}d(\sin x)$

答案为：(B)

(8) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内有二阶导数，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{1-\cos x}=100$，则（　）。

(A) $f''(0)\neq 0$，且点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B) $f'(0)=0$， $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $f''(0)=0$ 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f'(0)=0$， $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

答案为：(C)

(9) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $\exists\delta>0$，使(　　　)

(A) 对 $A=0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时， $f(x)=0$

(B) 对 $A\neq 0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时， $f(x)\neq 0$

(C) 对 $A=0,\ f(x_0)=0$

(D) 对 $A\neq 0,\ f(x_0)\neq 0$

答案为：(B)

(10) 若 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的二阶可导的奇函数，在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$，且 $f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内必有(　　　)。

(A) $f'(x)>0,$ 且存在常数 $k>0$ 使得 $y=f(x)$ 与 $y=kx$ 有唯一交点；

(B) $f'(x)>0,$ 且存在常数 $k>0$ 使得 $y=f(x)$ 与 $y=kx$ 有两个交点；

(C) $f'(x)<0,\ f''(x)<0$；

(D) $f'(x)<0,\quad f''(x)>0$。

答案为：(A)

(11) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b),\ f'_+(a)>0$，则下列命题错误的为（　）。

(A) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$

(B) 存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$

(C) 存在 $x_1\in(a,b)$，使得 $f(x_1)>f(b)$

(D) 存在唯一的 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$

答案为：(D)

[解]（单调性，或微分中值定理）

(A)正确（方法一 ）反证法。若 $f''(x)\ge 0$ 对任意的 $x\in(a,b)$ 都成立，则 $f'(x)$ 单增，

故 $f'(x)\ge f'_+(a)>0$，

所以 $f(x)$ 严格单增，这与 $f(a)=f(b)$ 矛盾。从而存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f''(\xi)<0。$$

（方法二） 因为 $f'_+(a)>0$，所以存在 $c\in(a,b)$，使得

$$f(c)>f(a)=f(b)。$$

根据微分中值定理，存在 $x_1\in(a,c)$， $x_2\in(c,b)$，使得

$$f'(x_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0,\ f'(x_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0,$$

从而存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1}<0$。(A)正确。

且存在 $x_0\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$。因此(B)正确。

(C)正确是因为 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=A>0$，由极限的保序性，存在 $\delta>0$，对任意的 $x\in\left(x_0,x_0+\delta\right)$ 有 $f\left(x\right)-f(a)=A(x-a)>0$，即存在 $x_1\in(a,b)$，使得

$f(x_1) > f(a) = f(b)$。

注意：函数在一点导数的正负号不能得出$(x_0-\delta, x_0)$或$(x_0, x_0+\delta)$内的增减性结论，

只能得出函数值的局部比较性质！

(12) 设 $A \in M_{mn}$，已知 $AX=0$ 只有零解，则以下错误的结论是(　　　)

(A) $m \geq n$　　(B) $AX=b\ (b \in R^m)$ 必有唯一解

(C) $r(A\text{的列组})=n$　　(D) $r(A\text{的行组})=n$

答案为：(B)

(13) 设 $P(A)>0$，$P(B)>0$，且 A 与 B 二事件互斥，下列关系式正确的是（　　）。

(A) $P(B)=P(B|A)$　　(B) $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$

(C) $P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A)}{1-P(B)}$　　(D) $P(B)=1-P(A)$

答案为：(C)

(14) 设随机变量 X_1 和 X_2 独立，且 $X_i \sim P(\lambda_i)$，$i=1$，2（即 X_i 服从参数为 λ_i 的泊松分布），则 $D(X_1-X_2)$ 为（　　）。

(A) $\lambda_1+\lambda_2$　　(B) $\lambda_1-\lambda_2$　　(C) ${\lambda_1}^2+{\lambda_2}^2$　　(D) ${\lambda_1}^2-{\lambda_2}^2$

答案为：(A)

三、 解答题(本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

(15)（本题满分 10 分）

设 $f'(x)$ 为 $([0, +\infty)$ 上的单调增函数，$f(0)=0$，试讨论函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的增减性。

[解] 令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{x}-\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}(xf'(x)-xf'(\xi))$，其中 $0<\xi<x$，

因为 $f'(x)$ 为 $([0, +\infty)$ 上的单调增函数，于是 $f'(x)>f'(\xi)$，$g'(x)>0$，所以

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调增加。

(16)（本题满分 10 分）

设 $y(x)=\arctan\sqrt{x^2-1}+\arcsin\dfrac{1}{x}$，　求 $y'(x)$。

[解]由于 $[\arctan\sqrt{x^2-1}]'=\dfrac{1}{1+(\sqrt{x^2-1})^2}\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$，

$$[\arcsin\frac{1}{x}]'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}},$$

所以 $y'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x-|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\begin{cases}0, & x>1\\ \dfrac{2}{x^2\sqrt{x^2-1}}, & x<-1\end{cases}$。

(17)（本题满分 12 分）

假设区域 D 由曲线 $y=px^3(y>0,P>0)$ 及其过点 $(1,p)$ 的切线与 x 轴围成，设此区域的形心为 (X,Y)，(1) 求 X 的值；(2) 求 p 的值，使区域 D 绕 y 轴旋转一周而生成的旋转体体积为 $V_y=\dfrac{7}{135}\pi$。

[解] $y'\big|_{x=1}=3px^2\big|_{x=1}=3p$，切线为 $y=p+3p(x-1)$，与轴交点为 $(2/3,0)$，

区域 D 的面积为 $A=\int_0^1 px^3dx-\dfrac{1}{6}p=\dfrac{1}{12}p$，对轴的静力矩为（假设面密度唯 1）

$$M_y=\int_0^1 px^3\cdot xdx-\int_{2/3}^1[p+3p(x-1)]xdx$$

$$=\frac{1}{5}p-\int_{2/3}^1(3px^2-2px)dx=\frac{1}{5}p-(1-\frac{8}{27}-1+\frac{4}{9})p=\frac{7}{135}p$$

于是 $X=\dfrac{84}{135}=\dfrac{28}{45}$。

$V_y=2\pi XA=2\pi\dfrac{84}{135}\cdot\dfrac{1}{12}p=\dfrac{14}{135}\pi p=\dfrac{7}{135}\pi$，解得 $p=\dfrac{1}{2}$。

(18)（本题满分 11 分）

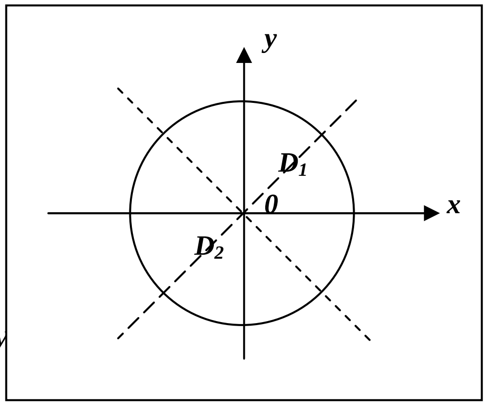
计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}|x+y|dxdy$

［解］ 答案：（$\frac{4}{3}\sqrt{2}$）。

解 1：令 $D_1=\left\{(\rho,\varphi)\middle|-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4},\ 0\le\rho\le 1\right\}$；

$D_2=\left\{(\rho,\varphi)\middle|\frac{3\pi}{4}\le\varphi\le\frac{7\pi}{4},\ 0\le\rho\le 1\right\}$；

$D_3=\left\{(\rho,\varphi)\middle|-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ 0\le\rho\le 1\right\}$

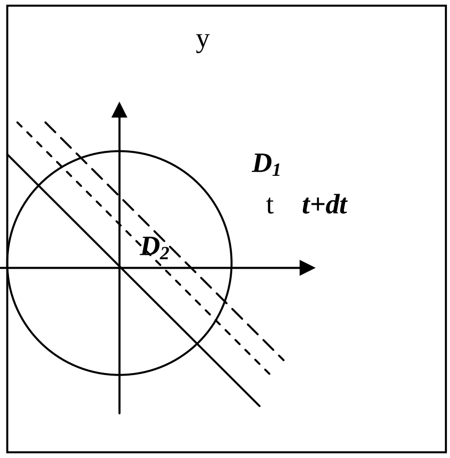


$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}|x+y|dxdy=\iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy-\iint\limits_{D_2}(x+y)dxdy$$

$$=2\iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy-\iint\limits_{D=D_1\cup D_2}(x+y)dxdy$$

$$=2\iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy-0$$

$$=4\iint\limits_{D_3}x\,dxdy=4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^1\rho^2d\rho=\frac{4}{3}\sqrt{2}\ .。$$



解 2：　$d\sigma=2\sqrt{1-\frac{t^2}{2}}\frac{dt}{\sqrt{2}}\cdot$　$t=x+y$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}|x+y|dxdy=\iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy-\iint\limits_{D_2}(x+y)dxdy$$

$$=2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}t\cdot\left(2\sqrt{1-\frac{t^2}{2}}\frac{dt}{\sqrt{2}}\right)=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}2t\sqrt{2-t^2}\,dx=-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{2-t^2}\,d\left(2-t^2\right)=\frac{4}{3}\sqrt{2}$$

（19）（本题满分 13 分）

某公司的一个研发部门研发甲已两类高科技产品，甲类产品可有 x 个品种选择，已类产品可有 y 个品种选择，限于研发能力，甲已两类产品的品种需满足 $x+y\le 9$，若每季度研发

甲已两类产品对该公司产生的效益函数为 $f(x,y)=4+2x+2y-x^2-y^2$（百万元），问：

该研发部门每个季度应如何制定研发策略使其效益最大？该研发部门每个季度潜在的最大风险（亏损最大）是什么？

[解] 求解 $f(x,y)=4+2x+2y-x^2-y^2$

在闭区域 $D=\{(x,y)\in R^2 \mid 0\le x\le 9,\ 0\le y\le 9-x\}$上的最大值最小值问题。

（1） $f_x'=2-2x$， $f_y'=2-2y$，驻点为 $p_0(1,1)$， $x_0=1$， $y_0=1$， $f(1,1)=6$。

（2）在边界 $y=0, 0\le x\le 9$ 上， $f(x,y)=4+2x-x^2$，

令 $f_x'=2-2x=0$ 得 $x_0=1$， $f(1,0)=5$。

（3）由对称性，在边界 $x=0, 0\le y\le 9$ 上 $f(0,1)=5$。

（4）在边界 $0\le x\le 9, y=9-x$ 上，

$$f(x,y)=4+2x+2(9-x)-x^2-(9-x)^2=-59+18x-2x^2,$$

令 $f'(x,9-x)=18-4x=0$ 得到 $x_2=\frac{9}{2}=y_2$， $f(\frac{9}{2},\frac{9}{2})=-\frac{37}{2}$，

（5）考虑端点： $f(0,0)=4$， $f(0,9)=f(9,0)=-59$。

答案： $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)=6$ （百万元）， $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)=-59$ （百万元）。

最佳策略是每季度甲已两类产品各研发一个品种，获利为 600 万元。最大的风险是单一产品研发，导致亏损 5900 万元。

(20)（本题满分 11 分）

已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=4 \\ -x_1+ax_2+x_3=a^2 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$ 有无穷多解，求 a 的取值并求通解。

[解] $(A\quad b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ -1 & a & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & a-2 & 8 \\ 0 & 0 & \frac{(a+1)(4-a)}{2} & a(a-4) \end{pmatrix}$

$a=4$ 时， $r\begin{pmatrix}A & b\end{pmatrix}=r(A)=2$ 有无穷解， 此时 $\begin{pmatrix}A & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -4\\0 & 1 & 1 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$X=k\begin{pmatrix}-3 & -1 & 1\end{pmatrix}^T+\begin{pmatrix}0 & 4 & 0\end{pmatrix}^T \qquad k\in R$

(21)（本题满分 9 分）

设 n 阶对称方阵 A 可逆，且满足 $(A-B)^2=E$，试化简 $\left(A^{-1}B^T+E\right)^T\left(E-BA^{-1}\right)^{-1}$.

[解] 原式 $=\left((A^{-1}B^T)^T+E^T\right)\left(AA^{-1}-BA^{-1}\right)^{-1}$

$$=\left(B(A^{-1})^T+E\right)\left((A-B)(A^{-1})\right)^{-1}=\left(B(A^T)^{-1}+E\right)A(A-B)^{-1}$$

$$=\left(BA^{-1}+E\right)A(A-B)^{-1}=\left(BA^{-1}+AA^{-1}\right)A(A-B)^{-1}=(A+B)(A-B)$$

(22)（本题满分 8 分）

设 $X\sim U[0,1]$，且在 $\{X=x\}$ 的条件下，$Y\sim U[0,x]$ （$x\in[0,1]$）；

试求：(1) (X,Y) 的联合概率密度函数 $f(x,y)$；

(2) $E(X^2+Y^2)$；

(3) $P(X^2+Y^2\le 1)$.

[解] 1) 因为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^x\frac{1}{x}dy=1 \qquad 0\le x\le 1$

且当 $0\le x\le 1$ 时，$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{1}{x} \qquad 0\le y\le x$，故

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{x} \qquad 0\le y\le x\le 1$$

2) $E(X^2+Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x(x^2+y^2)\frac{1}{x}dy$

$$=\int_0^1\frac{4}{3}x^2dx=\frac{4}{9}\ ;$$

3） $P(X^2+Y^2\le 1)=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ 0\le y\le x\le 1}}\frac{1}{x}dxdy$

$$\overset{\text{极坐标}}{=}\int_0^1 dr\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{r\cos\theta}rd\theta=\log(1+\sqrt{2})$$

（23）（本题满分 10 分）

设水电公司在指定时间内限于设备能力，其发电量 X(万 kW)～ $U_{[10,\ 30]}$ （均匀分布），用户用电量 Y(万 kW) ~ $U_{[10,\ 20]}$，这里 kW 表示千瓦．假设 X与 Y独立，水电公司每供应 1 kW 电得利 0.32 元的利润，但空耗每 kW 电损失 0.14 元， 而如用户用电量超过供电量时，公司需从别处补电，每 1 kW 电反而赔 0.20 元．求在指定时间内，该公司获利 Z的数学期望．

[解] 由题设

$$f_X(x)=\begin{cases}1/20 & \text{当}10\le x\le 30,\\ 0 & \text{其它.}\end{cases}，\quad f_Y(y)=\begin{cases}1/10 & \text{当}10\le x\le 20,\\ 0 & \text{其它.}\end{cases}$$

且 $f_{(X,Y)}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$．显然 E$X$ ＝20，EY ＝15．

故获利 $Z:=g(X,Y)=\begin{cases}3200Y-1200(X-Y) & \text{当}X\ge Y,\\ 3200X-2000(Y-X) & \text{其它.}\end{cases}$

$$\begin{aligned}
&EZ=Eg(X,Y)\\
&=\iint\limits_{x\le y}[3200y-1200(x-y)]f_{(X,Y)}(x,y)dxdy+\iint\limits_{x>y}[3200x-2000(y-x)]f_{(X,Y)}(x,y)dxdy\\
&=\int_{10}^{20}dy\int_y^{30}\frac{4400y-1200x}{20\times 10}dx+\int_{10}^{20}dy\int_{10}^{y}\frac{5200x-2000y}{20\times 10}dx\\
&=\int_{10}^{20}dy\left[\int_y^{30}(22y-6x)dx+\int_{10}^{y}(26x-10y)dx\right]\\
&=\int_{10}^{20}(-16y^2+760y-4000)dy=36667
\end{aligned}$$

答：在指定时间内，该公司获利的数学期望约为 3.67 万元．